第 XV 部　情報リテラシー

目次

目次

3　指数関数と対数関数

3.1　はじめに

- 同じ数を何度もかける演算を冪算といいます。
- 高校生までは、累乗といいます。
- 大学では冪算冪乗も使いますので紹介します。
- 意味は変わりません。

3.1.1　ポイント

- 冪乗
- 指数法則
- 指数関数
- 対数
- 対数関数

3.2　簡単な数式モデル

線型モデル

$$y = \alpha + \beta x \tag{1}$$

$$= \alpha + \overbrace{x + x + \cdots + x}^{\beta} \tag{2}$$

冪乗モデル

$$y = \alpha \times x^{\beta} \tag{3}$$

$$= \alpha \times \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{\beta} \tag{4}$$

指数モデル

$$y = \alpha \times \beta^{x} \tag{5}$$

$$= \alpha \times \overbrace{\beta \times \beta \times \cdots \times \beta}^{x} \tag{6}$$

3.3　冪乗と指数法則

a を n 回掛けることを『**冪乗**』[1]といい a^n とあらわす。このとき、a を『**底**』といい、n を『**冪数**』[2]という。「a^n」は「a の n 乗」と読む。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} \tag{7}$$

1)　『累乗』ともいう。

2)　『冪指数』または『累乗の指数』ともいう。

n が自然数の場合以下の関係が成り立つ[3)]。

$$a > 1 \iff a^n > 1 \tag{8}$$

$$a = 1 \iff a^n = 1 \tag{9}$$

$$0 < a < 1 \iff 0 < a^n < 1 \tag{10}$$

3） 本稿では底は正の場合のみを扱うが、底が負の場合は別の法則が存在する。

3.3.1　冪乗の積

$a>0$ であって、n,m はともに自然数とする。

$$
\begin{aligned}
a^n \times a^m &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n\text{ 個}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m\text{ 個}} && (11) \\
&= \underbrace{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}} \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個}}}_{n+m\text{ 個}} && (12) \\
&= a^{n+m} && (13)
\end{aligned}
$$

3.3.2 冪乗の商

$a>0$ 、 n,m はともに自然数であって、$n>m$ とする。

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{ 個}}}{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{ 個}}} \tag{14}$$

$$= \frac{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n-m\text{ 個}}\times\overbrace{\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cdots\times\cancel{a}}^{m\text{ 個}}}{\underbrace{\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cdots\times\cancel{a}}_{m\text{ 個}}} \tag{15}$$

$$= a^{n-m} \tag{16}$$

3.3.3　冪数の 0 への拡張

冪乗の商において $n = m = b$ とすると、

$$a^{n-m} = a^{b-b} = a^0 \tag{17}$$

とあらわすことができる。ここで $\dfrac{a^n}{a^m}$ を求めると

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^b}{a^b} = 1 \tag{18}$$

である。従って

$$a^0 = 1 \tag{19}$$

と定義する。

3.3.4　冪数の負の整数への拡張

冪乗の商において $n = 0, m$ は自然数とすると、

$$a^{0-m} = a^{-m} \tag{20}$$

とあらわすことができる。ここで $\dfrac{a^0}{a^m}$ を求めると

$$\frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \tag{21}$$

となる。なので

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \tag{22}$$

と定義する。

3.3.5　冪乗の冪乗

$a > 0$ とし、n, m はともに自然数とする。

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \times (a^n) \times \cdots \times (a^n)}_{m\text{ 個}} \tag{23}$$

$$= \underbrace{\overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{n\text{ 個}} \times (a \times a \times \cdots \times a) \times \cdots (a \times a \times \cdots \times a)}_{m\text{ 個}} \tag{24}$$

$$= \underbrace{a \times a \times \cdots a \times a \times a \times \cdots a \times \cdots \times a \times a \times \cdots a}_{n \times m\text{ 個}} \tag{25}$$

$$= a^{nm} \tag{26}$$

3.3.6 冪数の有理数への拡張

$a > 0$ とし、 n は自然数とする。a の $\dfrac{1}{n}$ 乗を n 乗した値を考えると冪乗の冪乗により

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}n} = a^1 = a \tag{27}$$

とあらわすことができる。そこで、$a^{\frac{1}{n}}$ を n 乗したら a になる数、すなわち a の n 乗根と定義する。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{28}$$

3.3.7　指数法則

　$a>0$ とし、$n,\ m$ を実数とすると以下の関係が成り立つ。

$$a^n a^m = a^{n+m} \tag{29}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{30}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{31}$$

これらの関係を『**指数法則**』という。

3.4　指数関数

定義

$a > 0$ と任意の実数 x, y に対して、

$$a^x a^y = a^{x+y} \tag{32}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \tag{33}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{34}$$

が成り立つ。このように冪数を変数として定義された関数 $y = a^x$ を『指数関数』と呼ぶ。

問題 XV**−3 − 1**

表 1 を使い以下の問いに答えなさい。

1. $y = a^x$ において $a = 2.0$ として表 1 に示す x に対応する値を求め空欄を埋めなさい。
2. 完成した表 1 の値をグラフにあらわしなさい。

表 1 $y = 2.0^x$ **の値**

x	$y = 2.0^x$
-2.0	
-1.0	
0.0	
0.5	
1.0	
1.5	
2.0	

問題 XV−**3 − 2**

表 2 を使い以下の問いに答えなさい。

1. $y = a^x$ において $a = 0.5$ として表 2 に示す x に対応する値を求め空欄を埋めなさい。
2. 完成した表 2 の値をグラフにあらわしなさい。

表 2　$y = 0.5^x$ **の値**

x	$y = 0.5^x$
-2.0	
-1.5	
-1.0	
-0.5	
0.0	
1.0	
2.0	

3.5　対数関数

定義

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ ならば $y > 0$ の値を指定すれば、指数関数 $y = a^x$ を満たす x の値はただ一つ決まる。そこで $y = a^x$ を x に関して解いた式を

$$x = \log_a y \tag{35}$$

という記号であらわす。

3.5.1　対数における各部の名称

(35) 式右辺を**対数**と呼ぶ。対数

$$\log_a b \tag{36}$$

において、a を『**底**（てい）』、b を『**真数**（しんすう）』とよぶ。b から (36) を求めることを『***a* を底とする対数をとる**』という。

特に底が、ネイピア数 e のとき、

$$\ln b \tag{37}$$

とあらわし、『**自然対数**』と呼ぶ。b から (37) を求めることを『**自然対数をとる**』という。

3.5.2　対数関数とは

　数学では、関数をあらわすときの記号は x を独立変数とし、y を従属変数とする場合が多い。この慣習に従い、(35) 式の x と y の記号を入れ替えた式

$$y = \log_a x \tag{38}$$

を対数関数とよぶ。対数関数の定義域は、$(0, +\infty)$ であり、値域は $(-\infty, +\infty)$ である。

問題 XV−3 − 3

$y = 2.72^x$ とする。何らかのアプリを使い以下の値を求め散布図にあらわしなさい。

x	y
-2.30	
-1.61	
-1.20	
-0.92	
-0.69	
-0.51	
-0.36	

x	y
-0.22	
-0.11	
0.00	
0.41	
0.69	
0.92	
1.10	

x	y
1.25	
1.39	
1.50	
1.61	
1.70	
1.79	
1.87	

3.5.3　対数の公式

対数において以下の関係が成り立つ。

$$\log_a \alpha\beta = \log_a \alpha + \log_a \beta \tag{39}$$

$$\log_a \frac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta \tag{40}$$

$$\log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha \tag{41}$$

これらの関係は指数法則より導き出すことができる。

3.5.4 対数を使う理由

歪んだサイコロの目の出る確率を考える。6 面体ではあるがとてつもなく歪んでいるのでそれぞれの目の出る確率は等しいとは考えられない。

確率の公理により、ある事象 x_i の確率を $\Pr(x_i)$ であらわすと

$$0 \leqq \Pr(x_i) \leqq 1 \tag{42}$$

である。このサイコロを投げたとき、1 が出る事象を $X = 1$ とし、1 が出ない事象を $X = 0$ とする。ここで、$\Pr(x_i = 1) = p_i$ とすると $\Pr(x_i = 0) = 1 - p_i$ である。このことを式であらわすと

$$l_i = p_i^{x_i} \left(1 - p_i\right)^{1-x_i} \tag{43}$$

である。この値を**尤度**という。

このサイコロを 100 回投げたとき $X = 1$ が n 回出たとする。この観測結果が得られる同時確率を尤度を用いて表現すると

$$L = {p_i}^n \left(1 - p_i\right)^{100-n} \tag{44}$$

である。この関数を**尤度関数**という。

(44) は p_i によって変化する。観測結果が得られたのは、観測結果がそもそも得られやす尤度を有していたからであると仮定し、尤度関数を最大化する p_i を推定する方法を最尤法または最尤推定という。

尤度は 1 以下の正数であるため、その冪乗は極めて微小な値をとる。具体例として、$n = 20$ として尤度関数を求めると、

$$L = p^{20} (1 - p)^{80} \tag{45}$$

である。

この尤度関数 L は

$$p = 0.20 \tag{46}$$

で最大値をとるが、このときの試行回数の合計は 100 回である。より多くの回数試行を行えば尤度関数の値はより微小な値となる。このような微小な数の最大値を求めることは容易ではない。そこで尤度関数を対数変換し最大値を求ることとで微小な値への対応を解決している。

尤度関数 (44) を対数変換すると

$$\ln L = n \ln p_i + (100 - n) \ln (1 - p_i) \qquad (47)$$

である。

尤度関数 L は単調関数なので、対数尤度関数を最大化する p は尤度関数も同時に最大化する。この性質を利用して、対数尤度関数を最大化してパラメータを推定している。

表 3　$\mathbf{n = 20}$ のときの尤度関数の値

p	L
0.10	0.000 000 000 000 000 000 000 002 184 745
0.15	0.000 000 000 000 000 000 000 075 048 020
0.20	0.000 000 000 000 000 000 000 185 267 343
0.25	0.000 000 000 000 000 000 000 091 981 660
0.30	0.000 000 000 000 000 000 000 014 134 104
0.35	0.000 000 000 000 000 000 000 000 821 163
0.40	0.000 000 000 000 000 000 000 000 019 647

表 4 $\mathbf{n=20}$ のときの対数尤度関数の値

p	$\ln(L)$
0.10	$-54.480\,543\,112\,507$
0.15	$-50.943\,914\,057\,539$
0.20	$-50.040\,242\,353\,818$
0.25	$-50.740\,453\,018\,540$
0.30	$-52.613\,451\,601\,617$
0.35	$-55.459\,075\,777\,369$
0.40	$-59.191\,864\,538\,762$

3.6　最大値を求める方法

最大値を求める方法には、以下の二つがあげられます。

1. 導関数をもとめ、導関数が 0 となるパラメータを求める。
2. 対数尤度関数の最大値をもたらすパラメータを直接求める。

Excel を用いて最大化をする場合、ソルバーを用いて最大化・最小化ならびに指定の値への最適化などを行うことが可能です。

問題 XV$-\mathbf{3-4}$

サイコロを 200 回投げたところ、1 の目が 33 回観測された。このサイコロにおける 1 の目が出る確率を p とする。最尤推定によって、p の値を求めなさい。

問題 XV$-\mathbf{3-5}$

サイコロを 1200 回投げたところ、1 の目が 296 回観測された。このサイコロにおける 1 の目が出る確率を p とする。最尤推定によって、p の値を求めなさい。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
4. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
5. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」1970 年 9 月 10 日 第 1 刷
6. 『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版

7.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著 「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
8.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
9.『完全独習 統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日 初版
10.『分散分析の基礎』高橋敬子著「プレアデス出版」2009 年 10 月 1 日