第 IX 部　母平均の差の検定

目次

9　母平均の区間推定

9.1　はじめに

- 平均値の差の検定では平均値の差があるかどうかが判断されます。
- 差があると分かっている状況で、その差がどの程度なのかを推定します。

9.1.1　ポイント

- 母分散が既知の場合の平均値の差の区間推定
- 母分散が未知の場合の平均値の差の区間推定

9.1.2 期待値と分散

定義

確率変数 $X = x_i$ と $\Pr(x_i) = p_i$ の積の総和を『**期待値**』といい、$\mathsf{E}(X)$ であらわす。

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{1}$$

定義

確率変数 $X = x_i$ の期待値 $\mathsf{E}(X)$ からの偏差の二乗の期待値を『**分散**』といい $\mathsf{V}(X)$ であらわす。

$$\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}(X))^2 \tag{2}$$

9.2　独立な 2 つの確率変数

2 つの独立な確率変数 $X,\ Y$ を考える。

$$X = x_i \quad ; i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

$$Y = y_j \quad ; j = 1, 2, \cdots, m \tag{4}$$

とし、それぞれの確率を

$$\Pr(x_i) = p_i \tag{5}$$

$$\Pr(y_j) = q_j \tag{6}$$

とする。すると、

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1 \tag{8}$$

であって、X と Y の同時確率は

$$\Pr(x_i, y_j) = p_i q_j \tag{9}$$

である。

9.2.1　$X+Y$ の期待値

$X+Y$ の期待値を求める。

$$\mathsf{E}\left(X+Y\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i+y_j\right)p_iq_j \tag{10}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(x_i+y_j\right)p_iq_j\right) \tag{11}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\sum_{j=1}^{m}\left(x_i+y_j\right)q_j\right) \tag{12}$$

括弧内総和部分を展開し、和の総和を総和の和であらわし

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\sum_{j=1}^{m}x_iq_j+\sum_{j=1}^{m}y_jq_j\right) \tag{13}$$

括弧内第 1 項からは共通因数として x_i を j に関する総和から掃き出し、第 2 項は Y の期待値なので

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i\sum_{j=1}^{m}q_j+\mathsf{E}\left(Y\right)\right) \tag{14}$$

q_j の総和は 1 なので

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i + \mathsf{E}\left(Y\right)\right) \tag{15}$$

総和内を展開し

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i p_i + p_i \mathsf{E}\left(Y\right)\right) \tag{16}$$

和の総和を総和の和であらわし

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \mathsf{E}\left(Y\right) \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{17}$$

第 1 項は X の期待値であり、第 2 項の総和部分は p_i の総和なので 1 だから

$$= \mathsf{E}\left(X\right) + \mathsf{E}\left(Y\right) \tag{18}$$

9.2.2 $X + Y$ の分散

補題 1

$$\mathsf{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i q_j \tag{19}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i p_i \sum_{j=1}^{m} y_j q_j\right) \tag{20}$$

括弧内総和部分は Y の期待値なので

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(x_i p_i \mathsf{E}(Y)\big) \tag{21}$$

期待値は定数なので総和の外に掃き出す。

$$= \mathsf{E}(Y)\sum_{i=1}^{n}(x_i p_i) \tag{22}$$

括弧内総和部分は X の期待値なので

$$= \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) \tag{23}$$

補題 2

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(X-\mathsf{E}(X)\right)\left(Y-\mathsf{E}(Y)\right) &= \mathsf{E}\left(XY-X\mathsf{E}(Y)-Y\mathsf{E}(X)+\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\right) && (24)\\
&= \mathsf{E}(XY)-\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)-\cancel{\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)}+\cancel{\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)} && (25)\\
&= \mathsf{E}(XY)-\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) && (26)\\
&= \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)-\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) && (27)\\
&= 0 && (28)
\end{aligned}
$$

$X+Y$ の分散

$$\mathsf{V}(X+Y)=\mathsf{E}\left(\left((X+Y)-\mathsf{E}(X+Y)\right)^2\right) \tag{29}$$

$$=\mathsf{E}\left(\left(X+Y-\mathsf{E}(X)-\mathsf{E}(Y)\right)^2\right) \tag{30}$$

$$=\mathsf{E}\left(\left(\left(X-\mathsf{E}(X)\right)+\left(Y-\mathsf{E}(Y)\right)\right)^2\right) \tag{31}$$

$$=\mathsf{E}\left(\left(X-\mathsf{E}(X)\right)^2+2\left(X-\mathsf{E}(X)\right)\left(Y-\mathsf{E}(Y)\right)+\left(Y-\mathsf{E}(Y)\right)^2\right) \tag{32}$$

和の期待値を期待値の和であらわし

$$=\mathsf{E}\left(\left(X-\mathsf{E}(X)\right)^2\right)+2\mathsf{E}\left(\left(X-\mathsf{E}(X)\right)\left(Y-\mathsf{E}(Y)\right)\right)+\mathsf{E}\left(\left(Y-\mathsf{E}(Y)\right)^2\right) \tag{33}$$

第 1 項と第 3 項はそれぞれ分散であり、第 2 項は補題 2 より 0 だから

$$= \mathsf{V}(X) + \mathsf{V}(X) \tag{34}$$

定理

$X,\ Y$ を独立な確率変数とする。期待値と分散に関して以下の関係が成り立つ。

$$\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y) \tag{35}$$

$$\mathsf{V}(X+Y) = \mathsf{V}(X) + \mathsf{V}(Y) \tag{36}$$

9.2.3　母集団と標本平均

母集団の分布に関わらず、十分に大きなサンプル・サイズをとった標本の標本平均は正規分布に従う。母平均を μ, 母分散を σ^2 とする。サンプル・サイズが n の標本平均を $\bar{X}$ であらわすと、

$$\mathsf{E}\left(\bar{X}\right) = \mu \tag{37}$$

$$\mathsf{V}\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{38}$$

である。

9.2.4　正規母集団

正規分布 $N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ に従う母集団を『**正規母集団**』という。

正規母集団から抽出されたサンプル・サイズ n の標本の標本平均 $\bar{X}$ は

$$N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{39}$$

に従う。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{40}$$

9.2.5　正規分布

確率変数 $X=x$ が標準正規分布に従う確率変数 $Z=z$ を用いて、

$$x=\mu+\sigma z \quad ;\sigma\neq 0 \tag{41}$$

とあらわせるとき、確率変数 X は、平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布であるといい、$N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ とあらわす。

9.2.6　標準化

確率変数 X が正規分布 $N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ に従うとき、$\mu,\ \sigma$ を用いて、

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \tag{42}$$

をつくると、z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

9.2.7　正規分布の 95% 信頼区間

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 $Z=z$ の信頼区間は

$$-1.96 \leqq z_i \leqq 1.96 \tag{43}$$

である。

$$x \sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right) \tag{44}$$

のとき 95% 信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{x_i-\mu}{\sigma} \leqq 1.96 \tag{45}$$

なので、

$$\mu - 1.96\sigma \leqq x_i \leqq \mu - 1.96\sigma \tag{46}$$

9.3　不偏分散

正規母集団 $N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ からサンプル・サイズ n の標本を抽出する。抽出された標本の平均を『**標本平均**』といい $\bar{X}$ であらわす。i 番目の標本 A の要素を $x_i \in A$ であらわすと、標本平均は

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{x_i \in A}^{n} x_i \tag{47}$$

である。

仮定により母平均は μ, 母分散は σ^2 である。ここで

$$\mathsf{E}\left(\sum_{x_i \in A}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2\right) \tag{48}$$

を考える。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{x_i \in A}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2\right) &= \mathrm{E}\left(\sum_{x_i \in A}^{n}\left(x_i{\color{blue}-\mu+\mu}-\bar{X}\right)^2\right) && (49)\\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{x_i \in A}^{n}\left((x_i-\mu)+\left(\mu-\bar{X}\right)\right)^2\right) && (50)\\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{x_i \in A}^{n}(x_i-\mu)^2+\sum_{x_i \in A}^{n}2\,(x_i-\mu)\left(\mu-\bar{X}\right)+\sum_{x_i \in A}^{n}\left(\mu-\bar{X}\right)^2\right) && (51)\\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{x_i \in A}^{n}(x_i-\mu)^2+2\left(\mu-\bar{X}\right)\sum_{x_i \in A}^{n}(x_i-\mu)+n\left(\mu-\bar{X}\right)^2\right) && (52)
\end{aligned}
$$

和の期待値は期待値の和なので

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{x_i \in A}^{n} (x_i - \mu)^2\right) + \mathsf{E}\left(2\left(\mu - \bar{X}\right) \sum_{x_i \in A}^{n} (x_i - \mu)\right) + \mathsf{E}\left(n\left(\mu - \bar{X}\right)^2\right) \tag{53}$$

ここで、第 1 項は i ごとに母分散の定義 $\mathsf{E}\left((x_i - \mu)^2\right) = \sigma^2$ より、$n\sigma^2$。

第 2 項総和部分は

$$\sum_{x_i \in A}^{n} (x_i - \mu) = \sum_{x_i \in A}^{n} x_i - n\mu \tag{54}$$

$$= n\bar{X} - \mu \tag{55}$$

$$= n\left(\bar{X} - \mu\right) \tag{56}$$

$$= -n\left(\mu - \bar{X}\right) \tag{57}$$

よって第 2 項は

$$\mathsf{E}\left(2(\mu - \bar{X})\left(-n\left(\mu - \bar{X}\right)\right)\right) = -2n\mathsf{E}\left(\left(\mu - \bar{X}\right)^2\right) \tag{58}$$

$$\tag{59}$$

上記から (53) は

$$= n\sigma^2 - 2n\mathsf{E}\left(\left(\mu - \bar{X}\right)^2\right) + n\mathsf{E}\left(\left(\mu - \bar{X}\right)^2\right) \tag{60}$$

$$= n\sigma^2 - n\mathsf{E}\left(\left(\mu - \bar{X}\right)^2\right) \tag{61}$$

(61) 第 2 項期待値部分は標本平均 $\bar{X}$ の分散なので $\mathsf{V}\left(\bar{X}\right)$ とあらわすと

$$\mathsf{V}\left(\bar{X}\right) = \mathsf{V}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \tag{62}$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathsf{V}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \tag{63}$$

各 x_i は独立なので分散の和に分解すると

$$= \frac{1}{n^2}\left(\mathsf{V}\left(x_1\right) + \mathsf{V}\left(x_2\right) + \cdots + \mathsf{V}\left(x_n\right)\right) \tag{64}$$

定義により $\mathsf{V}\left(x_i\right) = \sigma^2$ なので

$$= \frac{1}{n^2}n\sigma^2 \tag{65}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \tag{66}$$

よって (48) は

$$n\sigma^2 - n \times \frac{\sigma^2}{n} = n\sigma^2 - \sigma^2 \tag{67}$$

$$= \left(n-1\right)\sigma^2 \tag{68}$$

上記の結果から

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2\right)=(n-1)\,\sigma^2 \tag{69}$$

右辺の $(n-1)$ を払うと

$$\sigma^2=\frac{\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2\right)}{n-1} \tag{70}$$

$$=\mathsf{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}\right) \tag{71}$$

この期待値括弧内の値を s^2 であらわし、『**不偏分散**』という

定義

サンプル・サイズ n の標本の i 番目の要素を x_i とし、$\bar{X}$ を標本平均とする。このとき

$$s^2=\frac{\sum_{x_i\in A}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2}{n-1} \tag{72}$$

を『**不偏分散**』といい、$n-1$ を自由度という。

不偏分散の期待値は (71) より σ^2 である。

9.4　χ^2 分布

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う n 個の独立な確率変数 $z_1,\ z_2,\ \cdots\ ,\ z_n$ の平方和をつくり $\chi^2_{(z)}$ とあらわす。

$$\chi^2_{(z)} = \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 \tag{73}$$

このとき、n を『**自由度**』といい ν であらわす。そして $\chi^2_{(z)}$ の従う分布を『**自由度 $\boldsymbol{\nu = n}$ の $\boldsymbol{\chi^2}$ 分布**』という。

9.5　t 分布

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 z と、これとは独立に自由度 $\nu = n$ の χ^2 に従う確率変数 $\chi^2_{(z)}$ を用いて統計量を作り $t_{(z)}$ であらわす。この統計量

$$t_{(z)} = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(z)}}{\nu}}} \tag{74}$$

が従う分布を『t 分布』という。このとき、$\nu = n$ を t 分布の『自由度』という。

- t 分布は $t_{(z)} = 0$ を中心に左右対称の釣り鐘型の形状をしている。
- t 分布の形状は自由度 $\nu = n$ により異なり、自由度 $\nu = n$ が大きいときには標準正規分布によく近似する。

9.5.1 標本平均

$N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う n 個の確率変数 x_i の平均を『標本平均』といい、$\bar{X}$ であらわす。標本平均 $\bar{X}$ は、平均 μ, 分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N\left(\mu,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

標本平均を標準化した

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{75}$$

は標準正規分布に従う。

9.5.2 標本分散

標本平均からの偏差の二乗の平均を『標本分散』といい $V_{\bar{X}}$ であらわす。

$$V_{\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{x_i \in A}^{n} \left(x_i - \bar{X}\right)^2 \tag{76}$$

標本分散の正の平方根

$$D_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{x_i \in A}^{n} \left(x_i - \bar{X}\right)^2} \tag{77}$$

は標本の『標準偏差』である。

9.5.3 χ^2統計量

正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う確率変数 x_i を標準化した確率変数

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \tag{78}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うのだから、$N(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ n の標本 A についての $\chi^2_{(\mu)}$ 統計量

$$\chi^2_{(\mu)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \tag{79}$$

は自由度 $\nu = n$ の χ^2 分布に従う。

μ の代わりに標本平均 $\bar{X}$ を使った統計量

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \tag{80}$$

は自由度 $\nu = n - 1$ の χ^2 分布に従う。

ここで (80) を整理すると、

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{x_i \in A}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2 \tag{81}$$

$$= \frac{n}{\sigma^2}\frac{1}{n}\sum_{x_i \in A}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2 \tag{82}$$

$$= \frac{nV_{\bar{X}}}{\sigma^2} \tag{83}$$

9.5.4 標本分散を使った t 分布

標準化において μ に代えて標本平均 $\bar{X}$ を用いた統計量

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \frac{nV_{\bar{X}}}{\sigma^2} \tag{83}$$

の両辺の平方根をとり、$D_{\bar{X}} = \sqrt{V_{\bar{X}}}$ とすると

$$\sqrt{\chi^2_{(\bar{X})}} = D_{\bar{X}} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \tag{84}$$

である。

この $\chi^2_{(\bar{X})}$ の自由度は $\nu = n - 1$ である。

$N(\mu,\ \sigma^2)$ の正規母集団から抽出されたサンプルサイズ n の標本の標本平均 $\bar{X}$ は

$$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{85}$$

に従うから、標本平均 $\bar{X}$ を標準化した確率変数 z は

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{75}$$

$$= \left(\bar{X} - \mu\right) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \tag{86}$$

である。

これらを (74) に代入すると

$$t_{(\bar{X})} = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(\bar{X})}}{\nu}}} \tag{74}$$

$$= z\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\chi^2_{(\bar{X})}}} \tag{87}$$

$$= \left(\bar{X}-\mu\right)\cancel{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}\frac{\sqrt{\nu}}{D_{\bar{X}}\cancel{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}} \tag{88}$$

$$= \frac{\left(\bar{X}-\mu\right)\sqrt{\nu}}{D_{\bar{X}}} \tag{89}$$

ここで $\chi^2_{(\bar{X})}$ の自由度は $\nu = n-1$ なので

$$= \frac{\left(\bar{X}-\mu\right)\sqrt{n-1}}{D_{\bar{X}}} \tag{90}$$

$$= \frac{\bar{X}-\mu}{\left(\frac{D_{\bar{X}}}{\sqrt{n-1}}\right)} \tag{91}$$

は自由度 $\nu = n-1$ の t 分布に従う。ここで

$$D_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2} \tag{77}$$

である。

9.6　母平均の差の区間推定

平均値の差の検定で帰無仮説

$$H_0: \quad \mu_x - \mu_y = 0 \tag{92}$$

が棄却された場合、母平均の差の区間推定を行う。

9.6.1　母分散が既知の場合

$$\frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N\left(0,\ 1\right) \tag{93}$$

なので、95 % 信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}}} \leqq 1.96 \tag{94}$$

である。

これを、第 1 不等号右辺が $\mu_x - \mu_y$ となるように変形した

$$\bar{X} - \bar{Y} - 1.96\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}} \quad \leqq \quad \mu_x - \mu_y \quad \leqq \quad \bar{X} - \bar{Y} + 1.96\sqrt{\frac{{\sigma_x}^2}{n} + \frac{{\sigma_y}^2}{m}} \tag{95}$$

が、母平均の差 $\mu_x - \mu_y$ の 95 %信頼区間である。

9.6.2　母分散が未知の場合

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sum_{x_i\in A}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2+\sum_{y_j\in B}^{m}\left(y_j-\bar{Y}\right)^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t\left(n+m-2\right) \tag{96}$$

である。t 分布の両側 5%の臨界値を

$$t\left(\nu,0.05\right) \tag{97}$$

とあらわすと、

95 % 信頼区間は

$$-t\left(n+m-2,\ 0.05\right) \leqq \frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_x-\mu_y\right)}{\sqrt{\frac{\sum_{x_i\in A}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2+\sum_{y_j\in B}^{m}\left(y_j-\bar{Y}\right)^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \leqq t\left(n+m-2,\ 0.05\right) \tag{98}$$

である。第 1 不等式右辺を $\mu_x-\mu_y$ とするように変形すると、母分散が未知の場合の母平均の差の 95 % 信頼区間を得ることができる。

9.7　まとめ

- 母平均の差の検定では、差の有無のみが検定される。
- 母平均の差の検定で有意となったのちに、母平均の差の区間推定を行う。
- 母分散が未知か既知かで利用する分布が異なる。
- 母分散が既知の場合は正規分布で検定する。
- 母分散が未知の場合は t 分布で検定する。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8. 『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9. 『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10. 『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11. 『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版
12. 『分散分析の基礎』高橋敬子著「プレアデス出版」2009 年 10 月 1 日