第 IX 部　母平均の差の検定

目次

5　独立な 2 つの確率変数の和の分布

5.1　はじめに

- 独立な 2 つの確率変数の和をとります。
- 2 つの確率変数の和の期待値と分散を少ないサンプルを例に説明します。
- 一般の場合でも同様に成り立ちます。

5.1.1　ポイント

- 独立な 2 つの確率変数
- 和の期待値
- 和の分散

5.1.2 確率の公理主義的定義

確率の公理は次の 3 つからなる。これに合うならどのような数も確率と認められる。

1. 全ての事象 A に対して

$$0 \leqq \Pr(A) \leqq 1 \tag{1}$$

2. 標本空間 Ω 全体の確率は

$$\Pr(\Omega) = 1 \tag{2}$$

3. 互いに排反な事象 $A_1,\ A_2,\ A_2,\ \cdots$ に対して

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3) + \cdots \tag{3}$$

5.1.3　独立な事象

定義

事象 A と事象 B とそれらの積事象 $A \cap B$ の確率の関係が

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\ \Pr(B) \tag{4}$$

である場合、事象 A と事象 B は『**独立**』であるという。

積事象の確率を 2 つの事象の確率の積としてあらわすことができるとき 2 つの事象は独立である。

複数の事象が同時に起こる事象、つまり積事象の確率を『**同時確率**』という。事象が独立な時、同時確率はそれぞれの事象の確率の積としてあらわすことができる。

5.1.4 確率変数

変数がとりうる各数値に対して確率が与えられている変数を『**確率変数**』という。確率変数は大文字をつかってあらわす。

5.1.5 期待値

定義

確率変数 $X = x_i$ と x_i に対応する確率 $\Pr(x_i) = p_i$ の積の総和を『**期待値**』といい $\mathsf{E}(X)$ であらわす。

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{5}$$

問題 IX − 5 − 1

c を定数とする。

$$\mathsf{E}\left(c\right) = c$$

が成り立つことを示しなさい。

解例 IX − 5 − 1

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(c\right) &= \sum_{i=1}^{n} c\ p_i \\
&= c \sum_{i=1}^{n} p_i
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ なので

$$
= c
$$

(終)

問題 IX − 5 − 2

X を確率変数とし、c を定数とする。

$$\mathsf{E}\left(X + c\right) = \mathsf{E}\left(X\right) + c$$

が成り立つことを示しなさい。

解例 IX − 5 − 2

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(X+c\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i+c\right)p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i p_i + c\ p_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} c\ p_i \\
&= \mathsf{E}\left(X\right) + c
\end{aligned}
$$

(終)

問題 IX − 5 − 3

X を確率変数とし、a を定数とする。

$$\mathsf{E}\left(aX\right) = a\mathsf{E}\left(X\right)$$

が成り立つことを示しなさい。

解例 IX − 5 − 3

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(aX\right) &= \sum_{i=1}^{n} a x_i p_i \\
&= a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\
&= a\mathsf{E}\left(X\right)
\end{aligned}
$$

(終)

5.1.6　期待値の演算

期待値に関して以下の関係が成り立つ。ここで $a,\ c$ は定数とする。

$$\mathsf{E}\left(c\right) = c \tag{6}$$

$$\mathsf{E}\left(X + c\right) = \mathsf{E}\left(X\right) + c \tag{7}$$

$$\mathsf{E}\left(aX\right) = a\mathsf{E}\left(X\right) \tag{8}$$

5.1.7 分散

定義

確率変数 $X = x_i$ の期待値からの偏差の二乗の期待値を『**分散**』といい $\mathsf{V}(X)$ であらわす。

$$\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}\left(\left(X - \mathsf{E}(X)\right)^2\right) \tag{9}$$

(9) を変形すると

$$\begin{aligned}\mathsf{V}(X) &= \mathsf{E}\left(\left(X - \mathsf{E}(X)\right)^2\right) && (9)\\ &= \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}\left(X\right)^2 && (10)\end{aligned}$$

c を定数とする。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{V}\left(c\right) &= \mathsf{E}\left(\left(c-\mathsf{E}(c)\right)^2\right) && (11)\\
&= \mathsf{E}\left(\left(c-c\right)^2\right) && (12)\\
&= \mathsf{E}\left(0\right) && (13)\\
&= 0 && (14)
\end{aligned}
$$

c を定数とする。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{V}\left(X+c\right) &= \mathsf{E}\left(\left((X+c)-\mathsf{E}(X-c)\right)^2\right) && (15)\\
&= \mathsf{E}\left(\left(X+\cancel{c}-\mathsf{E}(X)-\cancel{c}\right)^2\right) && (16)\\
&= \mathsf{E}\left(\left(X-\mathsf{E}(X)\right)^2\right) && (17)\\
&= \mathsf{V}\left(X\right) && (18)
\end{aligned}
$$

a を定数とする。

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}(aX) &= \mathsf{E}\left(\left(aX - \mathsf{E}(aX)\right)^2\right) && (19)\\
&= \mathsf{E}\left(\left(aX - a\mathsf{E}(X)\right)^2\right) && (20)\\
&= \mathsf{E}\left(a^2\left(X - \mathsf{E}(X)\right)^2\right) && (21)\\
&= a^2\mathsf{E}\left(\left(X - \mathsf{E}(X)\right)^2\right) && (22)\\
&= a^2\mathsf{V}\left(X\right) && (23)
\end{aligned}$$

5.1.8　分散の演算

分散に関して以下の関係が成り立つ。ここで $a,\ c$ は定数とする。

$$\mathsf{V}(c) = 0 \tag{24}$$

$$\mathsf{V}(X + c) = \mathsf{V}(X) \tag{25}$$

$$\mathsf{V}(aX) = a^2\,\mathsf{V}(X) \tag{26}$$

5.2　独立な 2 つの確率変数

2 つの独立な確率変数 X, Y を考える。それぞれの確率変数の取りうる値を

$$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\} \tag{27}$$

$$Y = \{y_1,\ y_2,\ y_3\} \tag{28}$$

とする。

そして、それぞれの事象の確率を

$$\Pr(x_1) = p_1 \tag{29}$$

$$\Pr(x_2) = p_2 \tag{30}$$

$$\Pr(x_3) = p_3 \tag{31}$$

$$\Pr(x_4) = p_4 \tag{32}$$

$$\Pr(y_1) = q_1 \tag{33}$$

$$\Pr(y_2) = q_2 \tag{34}$$

$$\Pr(y_3) = q_3 \tag{35}$$

とする。

X と Y は独立な事象なので同時確率はそれぞれの確率の積である。

表 1 X と Y の同時確率分布

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	p_1q_1	p_2q_1	p_3q_1	p_4q_1
y_2	p_1q_2	p_2q_2	p_3q_2	p_4q_2
y_3	p_1q_3	p_2q_3	p_3q_3	p_4q_3

5.2.1 $\boldsymbol{X+Y}$ の期待値

$\boldsymbol{X+Y}$ の期待値をもとめる。

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X+Y) &= (x_1+y_1)\,p_1q_1 + (x_1+y_2)\,p_1q_2 + (x_1+y_3)\,p_1q_3 \\ &\quad + (x_2+y_1)\,p_2q_1 + (x_2+y_2)\,p_2q_2 + (x_2+y_3)\,p_2q_3 \\ &\quad + (x_3+y_1)\,p_3q_1 + (x_3+y_2)\,p_3q_2 + (x_3+y_3)\,p_3q_3 \\ &\quad + (x_4+y_1)\,p_4q_1 + (x_4+y_2)\,p_4q_2 + (x_4+y_3)\,p_4q_3 \end{aligned} \tag{36}$$

各項を展開し、

$$
\begin{aligned}
&= x_1p_1q_1 + y_1p_1q_1 + x_1p_1q_2 + y_2p_1q_2 + x_1p_1q_3 + y_3p_1q_3 \\
&+ x_2p_2q_1 + y_1p_2q_1 + x_2p_2q_2 + y_2p_2q_2 + x_2p_2q_3 + y_3p_2q_3 \\
&+ x_3p_3q_1 + y_1p_3q_1 + x_3p_3q_2 + y_2p_3q_2 + x_3p_3q_3 + y_3p_3q_3 \\
&+ x_4p_4q_1 + y_1p_4q_1 + x_4p_4q_2 + y_2p_4q_2 + x_4p_4q_3 + y_3p_4q_3 \qquad (37)
\end{aligned}
$$

天下り的に括弧に括る。

$$
\begin{aligned}
&= (x_1p_1q_1 + x_1p_1q_2 + x_1p_1q_3) + (y_1p_1q_1 + y_2p_1q_2 + y_3p_1q_3) \\
&+ (x_2p_2q_1 + x_2p_2q_2 + x_2p_2q_3) + (y_1p_2q_1 + y_2p_2q_2 + y_3p_2q_3) \\
&+ (x_3p_3q_1 + x_3p_3q_2 + x_3p_3q_3) + (y_1p_3q_1 + y_2p_3q_2 + y_3p_3q_3) \\
&+ (x_4p_4q_1 + x_4p_4q_2 + x_4p_4q_3) + (y_1p_4q_1 + y_2p_4q_2 + y_3p_4q_3) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

共通因数を掃き出す。

$$
\begin{aligned}
&= x_1p_1\left(q_1+q_2+q_3\right)+p_1\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)\\
&+ x_2p_2\left(q_1+q_2+q_3\right)+p_2\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)\\
&+ x_3p_3\left(q_1+q_2+q_3\right)+p_3\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)\\
&+ x_4p_4\left(q_1+q_2+q_3\right)+p_4\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$\Pr(\Omega) = 1$ なので

$$= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)(y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3) \tag{40}$$

$$= (x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + (y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3) \tag{41}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_ip_i + \sum_{j=1}^{m} y_jq_j \tag{42}$$

$$= \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y) \tag{43}$$

5.2.2　$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ の分散

$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ の分散をもとめる。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{V}(X+Y) &= \mathsf{E}\left(((X+Y)-\mathsf{E}(X+Y))^2\right) && (44)\\
&= \mathsf{E}\left((X+Y-\mathsf{E}(X)-\mathsf{E}(Y))^2\right) && (45)\\
&= \mathsf{E}\left(((X-\mathsf{E}(X))+(Y-\mathsf{E}(Y)))^2\right) && (46)\\
&= \mathsf{E}\left((X-\mathsf{E}(X))^2+2(X-\mathsf{E}(X))(Y-\mathsf{E}(Y))+(Y-\mathsf{E}(Y))^2\right) && (47)\\
&= \mathsf{E}\left((X-\mathsf{E}(X))^2\right)+2\mathsf{E}((X-\mathsf{E}(X))(Y-\mathsf{E}(Y)))+\mathsf{E}\left((Y-\mathsf{E}(Y))^2\right) && (48)\\
&= \mathsf{V}(X)+2\mathsf{E}((X-\mathsf{E}(X))(Y-\mathsf{E}(Y)))+\mathsf{V}(Y) && (49)
\end{aligned}
$$

ここで $\mathsf{E}\left((X-\mathsf{E}(X))(Y-\mathsf{E}(Y))\right)$ を考える。

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left((X-\mathsf{E}(X))(Y-\mathsf{E}(Y))\right) &= \mathsf{E}\left(XY - Y\mathsf{E}(X) - X\mathsf{E}(Y) + \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\right) && (50) \\
&= \mathsf{E}\left(XY\right) - \mathsf{E}\left(Y\mathsf{E}(X)\right) - \mathsf{E}\left(X\mathsf{E}(Y)\right) + \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\right) && (51) \\
&= \mathsf{E}\left(XY\right) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}\left(Y\right) - \cancel{\mathsf{E}(Y)\mathsf{E}\left(X\right)} + \cancel{\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)} && (52)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) \\
&= (x_1y_1 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_1q_1 + (x_1y_2 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_1q_2 + (x_1y_3 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_1q_3 \\
&+ (x_2y_1 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_2q_1 + (x_2y_2 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_2q_2 + (x_2y_3 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_2q_3 \\
&+ (x_3y_1 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_3q_1 + (x_3y_2 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_3q_2 + (x_3y_3 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_3q_3 \\
&+ (x_4y_1 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_4q_1 + (x_4y_2 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_4q_2 + (x_4y_3 - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\,p_4q_3 \qquad (53) \\
&= x_1y_1p_1q_1 - p_1q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_1y_2p_1q_2 - p_1q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_1y_3p_1q_3 - p_1q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) \\
&+ x_2y_1p_2q_1 - p_2q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_2y_2p_2q_2 - p_2q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_2y_3p_2q_3 - p_2q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) \\
&+ x_3y_1p_3q_1 - p_3q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_3y_2p_3q_2 - p_3q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_3y_3p_3q_3 - p_3q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) \\
&+ x_4y_1p_4q_1 - p_4q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_4y_2p_4q_2 - p_4q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + x_4y_3p_4q_3 - p_4q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) \qquad (54)
\end{aligned}
$$

天下り的に括弧でくくる。

$$
\begin{aligned}
&= (x_1y_1p_1q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_1y_3p_1q_3)\\
&+ (x_2y_1p_2q_1 + x_2y_2p_2q_2 + x_2y_3p_2q_3)\\
&+ (x_3y_1p_3q_1 + x_3y_2p_3q_2 + x_3y_3p_3q_3)\\
&+ (x_4y_1p_4q_1 + x_4y_2p_4q_2 + x_4y_3p_4q_3)\\
&- (p_1q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_1q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_1q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\\
&+ (p_2q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_2q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_2q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\\
&+ (p_3q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_3q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_3q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y))\\
&+ (p_4q_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_4q_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) + p_4q_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)) \qquad (55)
\end{aligned}
$$

共通因数を掃き出す。

$$
\begin{aligned}
&= x_1p_1\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)+x_2p_2\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)\\
&+x_3p_3\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)+x_4p_4\left(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3\right)\\
&-p_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\left(q_1+q_2+q_3\right)-p_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\left(q_1+q_2+q_3\right)\\
&-p_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\left(q_1+q_2+q_3\right)-p_4\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\left(q_1+q_2+q_3\right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

$q_1+q_2+q_3=1$ であり、$y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3=\mathsf{E}(Y)$ なので

$$
\begin{aligned}
&= x_1p_1\mathsf{E}(Y)+x_2p_2\mathsf{E}(Y)+x_3p_3\mathsf{E}(Y)+x_4p_4\mathsf{E}(Y)\\
&-p_1\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)-p_2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)-p_3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)-p_4\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)
\end{aligned}
\tag{57}
$$

共通因数を含む項をまとめ、整理すると

$$= \mathsf{E}(Y)\left(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4\right) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right) \tag{58}$$

$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = \mathsf{E}(X)$ であり、$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ なので

$$= \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) = 0 \tag{59}$$

よって (49) 第 2 項は 0 なので、

$$\mathsf{V}\left(X + Y\right) = \mathsf{V}\left(X\right) + \mathsf{V}\left(Y\right) \tag{60}$$

である。

5.2.3　2 変数の期待値と分散の演算

2 つの独立な確率変数 $X,\ Y$ を $X=\{x_1,\ x_1,\ \cdots\ ,\ x_n\}\ ,\ Y=\{y_1,\ y_1,\ \cdots\ ,\ y_m\}$ とし、$a,\ b$ を定数とする。

$$\mathsf{E}\left(aX+bY\right)=\mathsf{E}\left(aX\right)+\mathsf{E}\left(bY\right) \tag{61}$$

$$=a\mathsf{E}\left(X\right)+b\mathsf{E}\left(Y\right) \tag{62}$$

$$\mathsf{V}\left(aX+bY\right)=\mathsf{V}\left(aX\right)+\mathsf{V}\left(bY\right) \tag{63}$$

$$=a^2\mathsf{V}\left(X\right)+b^2\mathsf{V}\left(Y\right) \tag{64}$$

5.3　異なる正規母集団から抽出された 2 変数の和の分布

2 つの独立な確率変数 X, Y を考える。

$$X = \{x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,\ x_n\} \tag{65}$$

を正規分布 $N(\mu_x,\ {\sigma_x}^2)$ に従う正規母集団から抽出された n 個のデータとする。X の要素を識別する添え字に i を採用し x_i とする。ここで $1 \leqq i \leqq n$ である。また、

$$Y = \{y_1,\ y_2,\ \cdots\ ,\ y_m\} \tag{66}$$

を正規分布 $N(\mu_y,\ {\sigma_y}^2)$ に従う正規母集団から抽出された m 個のデータとする。y の要素を識別する添え字に j を採用し y_j とする。ここで $1 \leqq j \leqq m$ である。

　異なる正規母集団から抽出された確率変数 X と Y の和 $X+Y$ の分布も正規分布に従う確率変数である。$a,\ b$ を任意の定数として

$$ax_i + by_j \tag{67}$$

の従う分布は

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left(ax_i + by_j\right) &= \mathsf{E}\left(ax_i\right) + \mathsf{E}\left(by_j\right) && (68) \\ &= a\mathsf{E}\left(x_i\right) + b\mathsf{E}\left(y_j\right) && (69) \\ &= a\mu_x + b\mu_y && (70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{V}\left(ax_i + by_j\right) &= \mathsf{V}\left(ax_i\right) + \mathsf{V}\left(by_j\right) && (71) \\ &= a^2\mathsf{V}\left(x_i\right) + b^2\mathsf{V}\left(y_j\right) && (72) \\ &= a^2{\sigma_x}^2 + b^2{\sigma_y}^2 && (73) \end{aligned}$$

だから

$$ax_i + by_j \sim N\left(a\mu_x + b\mu_y,\ a^2{\sigma_x}^2 + b^2{\sigma_y}^2\right) \tag{74}$$

である。

5.4 まとめ

- 独立な確率変数の『**和の期待値は期待値の和**』である。

$$\mathsf{E}(X+Y)=\mathsf{E}(X)+\mathsf{E}(Y)$$

- 独立な確率変数の『**和の分散は分散の和**』である。

$$\mathsf{V}(X+Y)=\mathsf{V}(X)+\mathsf{V}(Y)$$

- ここでは示していないが一般の場合であっても同様に成り立つ。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版)』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著 「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版
12.『分散分析の基礎』高橋敬子著「プレアデス出版」2009 年 10 月 1 日