第 IV 部　ベクトル

目次

8　正規直交系

8.1　はじめに

- ノルムが 1 で、相互に直交しているベクトルの組を考えます。
- 3 つ以上のベクトルと直交するベクトルは見ることはできませんが定義はできます。
- これは 3 次元を超える世界の話です。

8.1.1　ポイント

- 正規直交系
- Schmidt の方法

8.1.2 ベクトルの和

定義

同じ次元の二つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

の和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

によって定義する。

8.1.3 ベクトルのスカラー倍

定義

ベクトル $\boldsymbol{a}$ にスカラー α をかけることを

$$\alpha\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\alpha a_1 & \alpha a_2 & \cdots & \alpha a_n\end{pmatrix} \tag{3}$$

によって定義する。

8.1.4 内積

定義

2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{4}$$

によって定まる値 $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**という。

問題 IV$-\mathbf{8-1}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -y & x \end{pmatrix}$$

とする。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めなさい。

問題 IV$-\mathbf{8-2}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とする。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めなさい。

問題 IV−**8 − 3**

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

(i) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$ と $\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$ の内積を求めなさい。

(ii) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$ と $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_3}$ の内積を求めなさい。

(iii) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_3}$ と $\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$ の内積を求めなさい。

8.1.5 ノルム

定義

$\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ を $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**といい、$\|\boldsymbol{a}\|$ とあらわす。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ のとき

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2} \tag{5}$$

である。

問題 IV**−8 − 4**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x & -y \end{pmatrix}$$

とする。

　$\boldsymbol{a}$ のノルムを求めなさい。

問題 IV**−8 − 5**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とする。$\boldsymbol{a}$ のノルムを求めなさい。

問題 IV**−8 − 6**

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$$

とする。$\boldsymbol{b}$ のノルムを求めなさい。

問題 IV**−8 − 7**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。$\boldsymbol{a}$ のノルムを求めなさい。

問題 IV$-\mathbf{8}-\mathbf{8}$

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

(i) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$ のノルムを求めなさい。

(ii) $\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$ のノルムを求めなさい。

(iii) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_3}$ のノルムを求めなさい。

8.1.6　角度

定義

2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{6}$$

を満たす θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で一意的に定まる。この θ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の**角度**という。

問題 IV$-\mathbf{8}-\mathbf{9}$

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

(i) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$ と $\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$ の間の角度を求めなさい。

(ii) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$ と $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_3}$ の間の角度を求めなさい。

(iii) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_3}$ と $\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$ の間の角度を求めなさい。

8.1.7　直交

定義

$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = 0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するといい

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \tag{7}$$

とあらわす。

8.2　正規直交系とは

定義

ベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ がいずれもノルムが 1 であって、しかも、異なるどの 2 つのベクトルも直交しているとき $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は『**正規直交系**』であるという。すなわち

$$\|\boldsymbol{a}\| = 1 \qquad ; i = 1, 2, \cdots, m \tag{8}$$

$$\langle \boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{a_j} \rangle = 0 \qquad ; i \neq j \tag{9}$$

のとき、『**正規直交系**』を形成する。

$\|\boldsymbol{a_i}\| = 1$ と $\langle \boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{a_i} \rangle = 1$ は同じことだから

$$\langle \boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{a_j} \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{10}$$

とかいてもよい。

例 1

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

は正規直交系である。

例 2

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{15}$$

は正規直交系である。

図 1 $\theta = \pi/6$

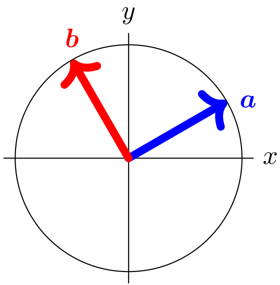
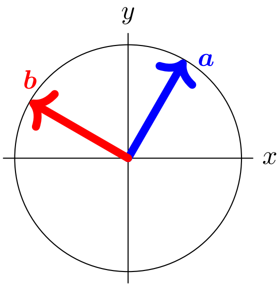


図 2 $\theta = \pi/3$



定理 IV−8 − 1

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が正規直交系であれば、これらは線型独立である。

証明

α_1, α_2, $\cdots$, α_m を

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

となるように選ぶ。

(16) 両辺と $\boldsymbol{a_i}$ との内積をとると

$$\begin{aligned} 右辺 &= \langle \mathbf{0},\ \boldsymbol{a_i}\rangle = 0 && (17)\\ 左辺 &= \langle \alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m},\ \boldsymbol{a_i}\rangle && (18)\\ &= \langle \alpha_1\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_i}\rangle + \langle \alpha_2\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_i}\rangle + \cdots + \langle \alpha_m\boldsymbol{a_m}, \boldsymbol{a_i}\rangle && (19)\\ &= \alpha_1\langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_i}\rangle + \alpha_2\langle \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_i}\rangle + \cdots + \alpha_m\langle \boldsymbol{a_m}, \boldsymbol{a_i}\rangle && (20)\end{aligned}$$

ここで $\langle \boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{a_i}\rangle = 1, \langle \boldsymbol{a_i},\ \boldsymbol{a_j}\rangle = 0 \quad ; i \neq j$ であるから

$$= \alpha_i \tag{21}$$

よって $\alpha_i = 0$ となる。ここでは i は、1, 2, $\cdots$,m のどれでもよいから、

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \tag{22}$$

が成立し、α_1, α_2, $\cdots$, α_m は線型独立になる。
(終)

一般に定理 IV–8 – 1 の逆は成り立たない。

問題 IV**–8 – 10**

定理 IV–8 – 1 の逆命題を示しなさい。

定理 IV−**8 − 2**

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型独立であるとする。このとき

$$\boldsymbol{b_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{a_1} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{b_2} = \alpha_{21}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{22}\boldsymbol{a_2} \tag{24}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{b_m} = \alpha_{m1}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{m2}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{mm}\boldsymbol{a_m} \tag{25}$$

の形のベクトル $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_m}$ が正規直交系になるように係数 α_{ij} を選ぶことができる。ここで $\alpha_{ij} \neq 0 \quad ; i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ である。

証明

$\boldsymbol{a_1}$ は線型独立だから $\boldsymbol{a_1} \neq \boldsymbol{0}$ である。したがって、$\|\boldsymbol{a_1}\| \neq \boldsymbol{0}$ である。そこで、

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a_1}\|}\boldsymbol{a_1} \tag{26}$$

とすれば

$$\|\boldsymbol{b_1}\| = 1 \tag{27}$$

となるから、

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a_1}\|} \tag{28}$$

とおく。これで $\boldsymbol{b_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{a_1}$ はできた。ここで $\langle \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_1} \rangle = 1$ である。

次に、$\boldsymbol{b_2}$ を作る。そのために、

$$\boldsymbol{c_2} = \beta_1 \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{a_2} \tag{29}$$

の形のベクトル $\boldsymbol{c_2}$ が $\boldsymbol{b_1}$ と直交するように係数 β_1 を決める。

$\boldsymbol{c_2}$ と $\boldsymbol{b_1}$ の内積は

$$\langle \boldsymbol{c_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle = \langle \beta_1 \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{30}$$

$$= \langle \beta_1 \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_1} \rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{31}$$

$$= \beta_1 \langle \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_1} \rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{32}$$

$$= \beta_1 + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{33}$$

であるから

$$\langle \boldsymbol{c_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle = 0 \tag{34}$$

となるためには、

$$0 = \beta_1 + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{35}$$

$$\beta_1 = -\langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{36}$$

とすればよい。

この β_1 を用いて作られた $\boldsymbol{c_2}$ は $\boldsymbol{c_2} \neq 0$ である。なぜなら、$\boldsymbol{c_2} = \boldsymbol{0}$ とすれば、(29) から

$$\beta_1 \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{a_2} = \beta_1 \alpha_{11} \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0} \tag{37}$$

となって、$\boldsymbol{a_1}$ と $\boldsymbol{a_2}$ が線型従属となってしま

うからである。$\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0}$ だから

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{1}{\|\boldsymbol{c_2}\|}\boldsymbol{c_2} \tag{38}$$

とおく。このとき $\|\boldsymbol{b_2}\| = 1$ であって、

$$\langle \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2} \rangle = \left\langle \boldsymbol{b_1},\ \frac{1}{\|\boldsymbol{c_2}\|}\boldsymbol{c_2} \right\rangle \tag{39}$$

$$= \frac{1}{\|\boldsymbol{c_2}\|}\langle \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{c_2} \rangle = 0 \tag{40}$$

だから $\boldsymbol{b_1}$ と $\boldsymbol{b_2}$ は直交する。

そして、(29) の形から $\boldsymbol{b_2}$ は $\boldsymbol{a_1}$ と $\boldsymbol{a_2}$ の線型結合である。

$$\boldsymbol{b_2} = \alpha_{21}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{22}\boldsymbol{a_2} \tag{41}$$

とかけば、

$$\alpha_{22} = \frac{1}{\|\boldsymbol{c_2}\|} \neq 0 \tag{42}$$

である。

これで $\boldsymbol{b_2}$ が得られた。

この手続きを続けて、$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_{k-1}}$ までできたとする。そのとき、$\boldsymbol{b_k}$ を作るために

$$\boldsymbol{c_k} = \beta_1 \boldsymbol{b_1} + \beta_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + \beta_{k-1} \boldsymbol{b_{k-1}} + \boldsymbol{a_k} \tag{43}$$

が $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_{k-1}}$ と直交するように β_1, β_1, $\cdots$, β_{k-1} を決める。

それには、$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_{k-1}}$ が正規直交系であることを念頭において

$$\langle \boldsymbol{c_k},\ \boldsymbol{b_1} \rangle = 0 \tag{44}$$

$$\langle \boldsymbol{c_k},\ \boldsymbol{b_2} \rangle = 0 \tag{45}$$

$$\vdots$$

$$\langle \boldsymbol{c_k},\ \boldsymbol{b_{k-1}} \rangle = 0 \tag{46}$$

を解いて

$$\beta_1 = -\langle \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{47}$$

$$\beta_2 = -\langle \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_2} \rangle \tag{48}$$

$$\vdots$$

$$\beta_{k-1} = -\langle \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_{k-1}} \rangle \tag{49}$$

とすればよい。こうして作られた $\boldsymbol{c_k}$ は $\mathbf{0}$ ではないから

$$\boldsymbol{b_k} = \frac{1}{\|\boldsymbol{c_k}\|}\boldsymbol{c_k} \tag{50}$$

と置けば、$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_k}$ は正規直交系になって、しかも $\boldsymbol{b_k}$ は $_{a_1}$, $_{a_2}$, $\cdots$, $_{a_k}$ の線型結合に

なる。そこで

$$\boldsymbol{b_k} = \alpha_{k1}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{k2}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{kk}\boldsymbol{a_k} \tag{51}$$

とかけば、

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{\|\boldsymbol{c_k}\|} \neq 0 \tag{52}$$

である。

　この手続きを $k = m$ までつづければよい。

（終）

　この証明の中で示した手続きによって線型独立なベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ から正規直交系 $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_m}$ を作る方法を **Schmidt の方法**という。

例

線型独立な 3 つの 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{55}$$

から Schmidt の方法により正規直交系を作る。

$\|\boldsymbol{a_1}\| = \sqrt{2}$ であるから

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$\beta_1 = -\langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle \tag{57}$$

$$= -\left((1)(0) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{58}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{59}$$

である。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c_2} &= \boldsymbol{a_2} + \beta_1 \boldsymbol{b_1} && (60) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} && (61) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} && (62) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} && (63) \end{aligned}$$

をつくる。

$$\|\boldsymbol{c_2}\| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{64}$$

だから

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{1}{\|\boldsymbol{c_2}\|}\boldsymbol{c_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{65}$$

である。これで $\boldsymbol{b_1}$ と $\boldsymbol{b_2}$ ができた。$\boldsymbol{b_3}$ を作るために

$$\beta_1 = -\langle \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_1} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{66}$$

$$\beta_2 = -\langle \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} \tag{67}$$

とおいて

$$\boldsymbol{c_3} = \boldsymbol{a_3} + \beta_1 \boldsymbol{b_1} + \beta_2 \boldsymbol{b_2} \tag{68}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{71}$$

をつくり、この長さを 1 とすればよい。$\|\boldsymbol{c_3}\| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ なので

$$\boldsymbol{b_3} = \frac{1}{\|\boldsymbol{c_3}\|}\boldsymbol{c_3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{72}$$

こうして

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$\boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$\boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{72}$$

が求める正規直交系である。

問題 IV−**8 − 11**

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

から Schmidt の方法により正規直交系を作りなさい。

問題 IV**−8 − 12**

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

から Schmidt の方法により正規直交系を作りなさい。

問題 IV$-\mathbf{8-13}$

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から Schmidt の方法により正規直交系を作りなさい。

8.3　まとめ

- ノルムが 1 で互いに直交するベクトルの組を正規直交系という。
- 正規直交系であれば線型独立である。
- Schmidt の方法によれば線型独立なベクトルの組から正規直交系を作ることができる。

参考文献

1.『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2.『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3.『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版)』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4.『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5.『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6.『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著 「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7.『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8. 『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9. 『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著 「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10. 『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11. 『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版