第 IV 部　ベクトル

目次

7　ベクトルの内積

7.1　はじめに

- ベクトル同士を掛け合わせる演算を内積といいます。
- 内積で得られるものはスカラーです。
- 内積が定義できるとベクトルの長さのようなものが定義できます。
- 内積が定義できるとベクトル間の角度が定義できます。

7.1.1　ポイント

- 内積
- ノルム
- 角度
- 直交

7.2　ベクトルの内積

定義

2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{1}$$

によって定まる値 $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**という。

定理 IV−7 − 1

内積は次の性質を持つ。

(i) $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} \rangle$

(ii) $\langle \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b} \rangle$

(iii) $\langle \alpha\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$　　;αは任意のスカラー

(iv) $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \rangle \geqq 0$

$\boldsymbol{a} \neq 0$ ならば、$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \rangle > 0$

証明

(i)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

とする。内積の定義により

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{4}$$

$$\langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} \rangle = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n \tag{5}$$

である。右辺各項は交換法則により

$$a_i b_i = b_i a_i \tag{6}$$

が成り立つから、その和である右辺は等しい。従って

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} \rangle \tag{7}$$

(終)

(ii)

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

とする。ベクトルの和は

$$\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \cdots & a_{1n} + a_{2n} \end{pmatrix} \tag{11}$$

である。

内積の定義により

$$\langle \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b} \rangle = (a_{11} + a_{21})\, b_1 + (a_{12} + a_{22})\, b_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{2n})\, b_n \tag{12}$$

$$= a_{11}b_1 + a_{21}b_1 + a_{12}b_2 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n + a_{2n}b_n \tag{13}$$

$$= (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n) + (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n) \tag{14}$$

$$= \langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b} \rangle \tag{15}$$

(終)

(iii)

α を任意のスカラーとし

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{17}$$

とする。スカラー倍は

$$\alpha\ \boldsymbol{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \cdots & \alpha a_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

である。

$$\langle \alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \cdots + \alpha a_n b_n \tag{20}$$

$$= \alpha \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \right) \tag{21}$$

$$= \alpha \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle \tag{22}$$

(終)

(iv)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{23}$$

とする。

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2 \tag{24}$$

右辺各項は ${a_i}^2 \geqq 0$ なので その和は非負である。従って

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geqq 0 \tag{25}$$

また、$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ならば、(32) 右辺のどれかは 0 ではないから

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle > 0 \tag{26}$$

(終)

問題 IV−7 − 1

以下の計算をしなさい。

(1)　$\langle \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} \rangle$

(2)　$\langle \alpha \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2},\ \beta \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} \rangle$

(3)　$\langle \alpha \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2},\ \alpha \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} \rangle$

解例 IV−7 − 1

(i)　定理 IV−7 − 1(ii) において

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2}$$

とすると

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} \rangle &= \langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} \rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_1} \rangle + \langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_2} \rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1} \rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_2} \rangle\end{aligned}$$

(ii) (i) より

$$\begin{aligned}\langle \alpha\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2},\ \beta\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}\rangle &= \langle \alpha\boldsymbol{a_1},\ \beta\boldsymbol{b_1}\rangle + \langle \alpha\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_2}\rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \beta\boldsymbol{b_1}\rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_2}\rangle \\ &= \alpha\beta\langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_1}\rangle + \alpha\langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_2}\rangle + \beta\langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_1}\rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{b_2}\rangle\end{aligned}$$

(iii) (ii) より

$$\begin{aligned}\langle \alpha\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}, \alpha\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}\rangle &= \alpha\alpha\langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_1}\rangle + \alpha\langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2}\rangle + \alpha\langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_1}\rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_2}\rangle \\ &= \alpha^2\langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_1}\rangle + 2\alpha\langle \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2}\rangle + \langle \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_2}\rangle\end{aligned}$$

7.3 ノルム

定義

$\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ を $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**といい、$\|\boldsymbol{a}\|$ とあらわす。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ のとき

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2} \tag{27}$$

である。

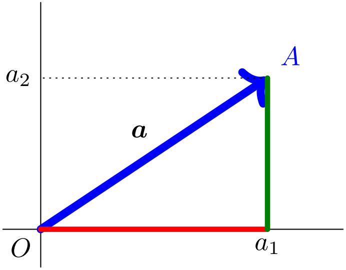
あるいは**長さ**あるいは**大きさ**ともいう。

$\mathbb{R}^2$ の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ に対しては、O を座標の原点とし、点 A の座標を (a_1, a_2) とすると、$\boldsymbol{a}$ は座標平面における有向線分 $\overrightarrow{OA}$ である。

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \tag{28}$$

が $\overrightarrow{OA}$ のノルムになっていることは Pythagoras の定理により明らかである。

図 1　$\mathbb{R}^2$ のベクトルのノルム

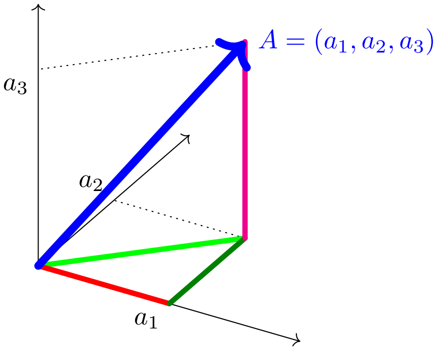


$\mathbb{R}^3$ の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ に対しては、O を座標の原点とし、点 A の座標を $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とすると、$\boldsymbol{a}$ は座標空間における有向線分 $\overrightarrow{OA}$ である。

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \tag{29}$$

が $\overrightarrow{OA}$ のノルムになっている。

図 2　$\mathbb{R}^3$ のベクトルのノルム



定理 IV−7 − 2

内積, ノルムに関して以下の関係が成り立つ。

(i) $|\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ (Schwarz の不等式)

等式が成り立つのは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が線型従属の場合に限る。

(ii) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (Minkovski の不等式)

等式が成り立つのは $t \geqq 0$ で $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{b}$ を満たす t が存在する場合に限る。

証明

(i) t を実数値をとる変数として 2 次関数

$$\langle \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \rangle t^2 + 2\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle t + \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} \rangle \tag{30}$$

を考える。定理 IV–7 – 1(iv) により、

$$\langle \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \rangle \geqq 0 \tag{31}$$

だから、

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \rangle t^2 + 2\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle t + \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} \rangle \geqq 0 \tag{32}$$

が成り立つ。全ての t に関して (32) が成り立つから、(32) 左辺の 2 次関数の判別式[1] の値は非正である。よって、

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle^2 - \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\rangle \leqq 0 \tag{33}$$

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle^2 \leqq \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\rangle \tag{34}$$

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2\ \|\boldsymbol{b}\|^2 \tag{35}$$

(35) の両辺の平方根をとれば (i) が得られる。

1） $a \neq 0$ のとき、$ax^2 + 2bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ である。この時の分子第 2 項根号の中を判別式という。

ここで

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle^2 = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\rangle \tag{36}$$

が成り立つ場合を考える。

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ の場合

$$(36)\ \text{左辺} = \langle \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}\rangle^2 = 0^2 = 0 \tag{37}$$

$$(36)\ \text{右辺} = \langle \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0}\rangle\langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\rangle = 0\langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\rangle = 0 \tag{38}$$

なので、(36) は成り立つ。

定理 IV–7 – 2 より、

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{39}$$

は単独で線型従属であるから、定理 IV–4 – 5 系 2 により $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は線型従属である。

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ の場合

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ の時に (36) が成り立つとすれば、2 次方程式

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\rangle t^2 + 2\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle t + \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\rangle = 0 \tag{40}$$

の判別式は 0 になるから、この 2 次方程式は実数解（重解）を持つ。従って、

$$\langle \boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}\rangle = 0 \tag{41}$$

を満たす t が存在して、この t に対して、

$$\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \tag{42}$$

が成立する。よって $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は線型従属である。(終)

(ii)

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= \langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle && (43)\\ &= \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\rangle + 2\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle + \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\rangle && (44)\\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle + \|\boldsymbol{b}\|^2 && (45)\end{aligned}$$

$$(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \tag{46}$$

である。

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle \leqq \left|\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\right| \tag{47}$$

だから、(i) により、

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle \leqq \left| \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle \right| \leqq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \tag{48}$$

である。よって、(45) と (46) 右辺との間には

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \tag{49}$$

が成立する。よって

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 \leqq \left(\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|\right)^2 \tag{50}$$

が成立し、両辺の平方根をとれば (ii) が成立する。

　等号が成り立つのは

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \tag{51}$$

となる場合である。これは (i) が等号で成り立つ場合である。このとき (36) が成り立って $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は線型従属になる。

　従って、

$$\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{b} \tag{53}$$

を満たす t が存在する。

　$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ であれば、

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| > 0 \tag{54}$$

であるから、

$$t > 0 \tag{55}$$

である。

　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であれば

$$\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{b} \tag{56}$$

となるし、$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ であれば

$$\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a} \tag{57}$$

となるから

$$t=0 \tag{58}$$

と取ればよい。

いずれにしろ、

$$\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b} \tag{53}$$

となる

$$t \geqq 0 \tag{59}$$

が存在する。

逆に、$\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}$ あるいは $\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b}$ となる $t \geqq 0$ があれば

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \tag{60}$$

は成立する。

(終)

定理 IV−7 − 2 系

任意の実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, ,b_1, b_2, $\cdots$, b_n, に対して

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqq \left({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2\right)\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right) \tag{61}$$

が成立する。この不等式も Schwarz の不等式といわれている。

証明

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{63}$$

とおく。定理 IV–7 – 2(i) により

$$\left|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right| \leqq \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2} \tag{64}$$

両辺を二乗すると

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq \left({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2\right) \tag{61}$$

を得る。（終）

7.4　ベクトル間の角度

内積を用いるとベクトル間の角度を与える式を求めることができる。

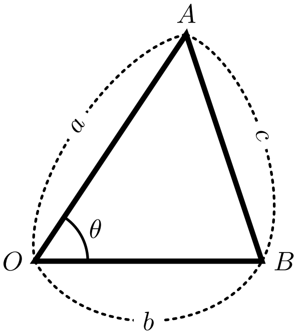
7.4.1　第 2 余弦法則

$\triangle OAB$ において、$\angle AOB = \theta$, $OA = a$, $OB = b$, $AB = c$ とすれば

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{65}$$

が成立する。

図 3　第 2 余弦法則

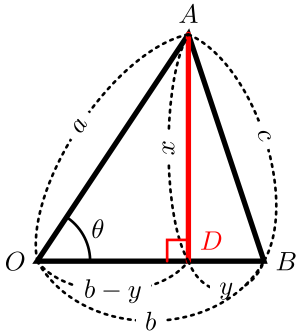


証明

A から OB におろした垂線の足を D とし、$AD = x$, $BD = y$ とおく。$AD \perp OB$ だから、$c^2 = x^2 + y^2$ そして、$x = a\sin\theta$ であって、$b - y = a\cos\theta$ だから、$y = b - a\cos\theta$ なので

$$c^2 = x^2 + y^2 \tag{66}$$
$$= (a\sin\theta)^2 + (b - a\cos\theta)^2 \tag{67}$$
$$= a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta + b^2 - 2b\cos\theta \tag{68}$$
$$= a^2 + b^2 - 2b\cos\theta \quad \text{（終）} \tag{65}$$

図 4　A から OB におろした垂線



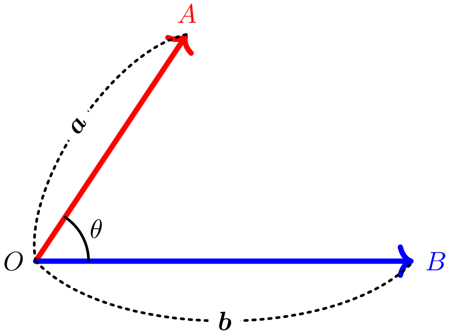
7.4.2　ベクトル間の角度

座標平面上において、2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ が有向線分 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ であらわされているとする。O は座標の原点である。このとき、$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の間の角度を『**$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の角度**』として定義する。ここで θ は

$$0 \leqq \theta \leqq \pi \tag{69}$$

の範囲で考える。

図 5　ベクトル間の角度



$\overrightarrow{OA}$ のノルムは

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \tag{70}$$

$\overrightarrow{OB}$ のノルムは

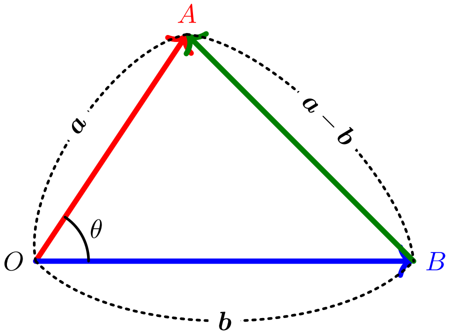
$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2} \tag{71}$$

である。$\overrightarrow{BA}$ は $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ であらわすから、$\overrightarrow{BA}$ のノルムは

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \tag{72}$$

である。ここで第 2 余弦法則を使う。

図 6　ベクトル間の角度



$\triangle OAB$ に第 2 余弦法則を使うと、$OA = \|\boldsymbol{a}\|$, $OB = \|\boldsymbol{b}\|$, $AB = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|$ だから

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \tag{73}$$

が成立する。よって

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 - 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \tag{74}$$

$$\cancel{{a_1}^2} - 2a_1b_1 + \cancel{{b_1}^2} + \cancel{{a_2}^2} - 2a_2b_2 + \cancel{{b_2}^2} = \cancel{{a_1}^2} + \cancel{{a_2}^2} + \cancel{{b_1}^2} + \cancel{{b_2}^2} - 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \tag{75}$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \tag{76}$$

左辺は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ だから

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \tag{77}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{78}$$

が得られる。

3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ のときも全く同様にして (78) を導くことができる。定理 IV–7 – 2(i)Schwarz の不等式により、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が n 次元ベクトルの時でも (78) 右辺の絶対値が 1 を超えないから $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を与えれば (65) を満たす

$$\theta \quad ; 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

は一意的に定まる。

定義

2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{78}$$

を満たす θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で一意的に定まる。この θ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の**角度**という。

例

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とすれば

$$\|\boldsymbol{a}\| = 1 \tag{79}$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = 2 \tag{80}$$

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \sqrt{3} \tag{81}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{82}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ だから

$$\theta = \frac{\pi}{6} \tag{83}$$

(78) において $\|\boldsymbol{a}\| > 0,\ \|\boldsymbol{b}\| > 0$ であるから $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ の符号と $\cos\theta$ の符号は一致する。よって

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \tag{84}$$

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \tag{85}$$

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi \tag{86}$$

が成立する。$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ の値の正,0, 負に応じて θ が鋭角か直角か鈍角かが決まる。

$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = 0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するといい

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \tag{87}$$

とあらわす。

　ゼロ・ベクトル $\mathbf{0}$ はどんな $\boldsymbol{a}$ に対しても $\langle \mathbf{0},\ \boldsymbol{a} \rangle = 0$ であるから**『ゼロ・ベクトルは全てのベクトルと直交する』**と約束する。

例

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{89}$$

とすると

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = (1)(-3) + (-1)(1) + (2)(1) + (-1)(-2) = 0 \tag{90}$$

であるから $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する。

7.4.3 計量ベクトル空間

内積が定義されているベクトル空間を**計量ベクトル空間**という。内積が定義されれば

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle} \tag{91}$$

によって $\boldsymbol{a}$ のノルム $\|\boldsymbol{a}\|$ を定義することができる。この場合であっても定理 IV$-7-1$(i)(ii) はそのまま成立する。従って、

$$\left|\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle\right| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \tag{92}$$

が成り立つから

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \tag{93}$$

を満たす θ ;$0 \leqq \theta \leqq \pi$ を一意的に定めることができる。この θ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の**角度**と定義する。

このとき

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = 0 \tag{94}$$

である $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するという。

7.5　まとめ

- 2 つの n 次元ベクトル
  $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ と
  $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ に対して

  $$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

  によって定まる値を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**という。
- $\sqrt{\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \rangle}$ を $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**といい、$\|\boldsymbol{a}\|$ であらわす。
- 2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で

  $$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

  を満たす θ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の**角度**という。
- 内積が

  $$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle = 0$$

  である $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するといい $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ とあらわす。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷
8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版