第 IV 部　ベクトル

目次

6　$\mathbb{R}^n$ のベクトルの幾何学的解釈

6.1　はじめに

- ベクトルという言葉はいろいろな場面で使われます。
- 単なる数字の組み合わせではありません。
- 力の説明にもベクトルとう語は使われます。
- それらは同じものとして考えることができます。

6.1.1　ポイント

- 位置ベクトルとベクトル
- 線型従属の幾何学的意味

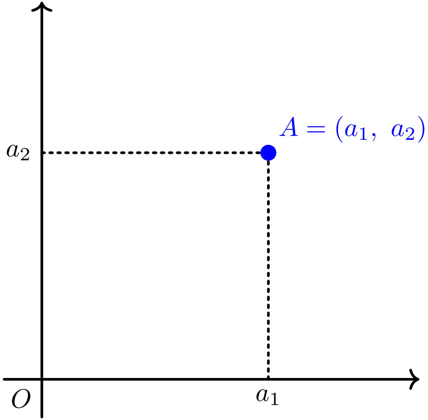
6.2　平面上の点

平面に直行する 2 本の直線を描き、これらを座標軸として平面に座標を導入する。これによって、平面上の点 A に座標

$$(a_1,\ a_2) \tag{1}$$

が与えられる。

図 1　平面上の点 A



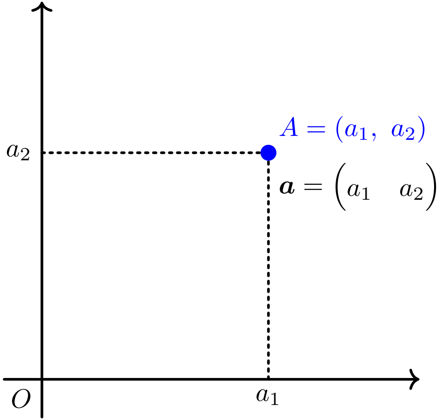
各座標軸の値をベクトルの成分に対応させ、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

と書けば、$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ が座標 $(a_1,\ a_2)$ を持つ平面上の点 A に対応する。

この対応は 1 対 1 である。

図 2　平面上の点 A とベクトル $\boldsymbol{a}$



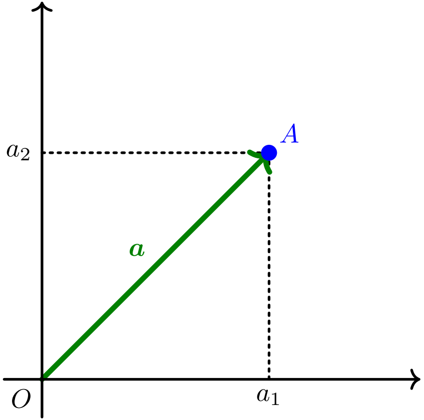
あるいは、原点 O を始点とし、A を終点とする有効線分 $\overrightarrow{OA}$ を、位置ベクトルとして $\boldsymbol{a}$ に対応させることもできる。

また、$\overrightarrow{OA}$ と同じ向きと大きさを持つ有向線分は全て同じとみなして得られる幾何ベクトルを $\boldsymbol{a}$ に対応させることもできる。

これらの対応も全て 1 対 1 である。

$\mathbb{R}^2$ の各ベクトルに、座標上の点、あるいは位置ベクトル、あるいは幾何ベクトル図形的なイメージを与えることができる。ここでは位置ベクトルを対応させる。

図 3　平面上の点 A と位置ベクトル



6.3 ベクトルの和

$\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

の和は

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

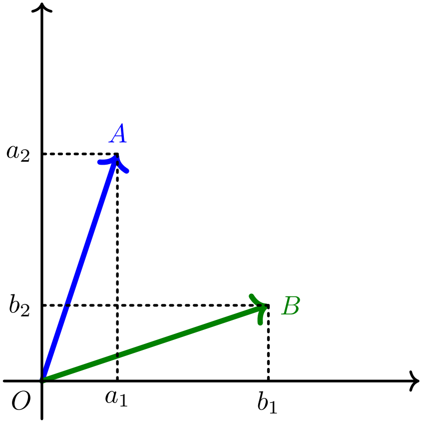
で定義されている。

6.3.1　ベクトルと有向線分の対応

一方、座標平面上に $(a_1,\ a_2)$ を座標に持つ点 A と $(b_1,\ b_2)$ を座標に持つ点 B をとればベクトル $\boldsymbol{a}$ には、位置ベクトルとして有向線分 $\overrightarrow{OA}$ が対応し、$\boldsymbol{b}$ には、有向線分 $\overrightarrow{OB}$ が対応する。

特別な場合として、始点と終点が同じ点である $\overrightarrow{OO}$ も有向線分の仲間に入れる。$\overrightarrow{OO}$ は長さが 0 であり、方向は持たない。$\overrightarrow{OO}$ には $\mathbf{0}$ が対応する。

図 4　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$



線分 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を隣り合う 2 辺とした平行四辺形をつくり、この平行四辺形のもう一つの頂点を C とする。有向線分 $\overrightarrow{OC}$ で与えられる位置ベクトルを $\boldsymbol{c}$ とし、$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和として定義し

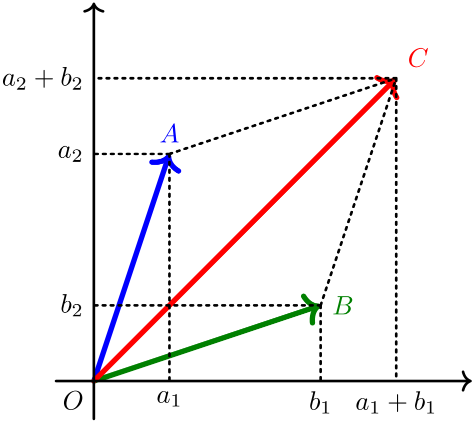
$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{6}$$

とあらわす。すると、C の座標は

$$(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2) \tag{7}$$

であり、(7) は (5) に対応する。

図 5　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$



6.4 スカラー倍

ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ のスカラー α 倍は

$$\alpha \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

で定義されている。

一方、位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ のスカラー α 倍を次のように定義する。

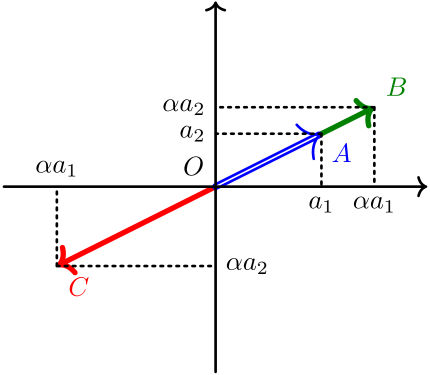
- $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であれば、全ての α に対して $\alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とする。
- $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする。
  - $\alpha > 0$ のときは、$\boldsymbol{a}$ と同じ方向を持ち長さが $\boldsymbol{a}$ の α 倍である有向線分 $\alpha\boldsymbol{a}$ とかく。
  - $\alpha < 0$ のときは、$\boldsymbol{a}$ と反対の方向を持ち長さが $\boldsymbol{a}$ の $|\alpha|$ 倍である有向線分 $\alpha\boldsymbol{a}$ とかく。
  - $\alpha = 0$ ならば、全ての $\boldsymbol{a}$ に対して $\alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とする。

6.4.1　有向線分の対応

$\alpha > 0$ の時は、$\overrightarrow{OA}$ と同じ方向で長さが $\overrightarrow{OA}$ の α 倍の $\overrightarrow{OB}$ であり、$\alpha < 0$ の時は、$\overrightarrow{OA}$ と反対方向で長さが $\overrightarrow{OA}$ の $|\alpha|$ 倍の $\overrightarrow{OC}$ である。

これらの終点の座標は $(\alpha a_1,\ \alpha a_2)$ である。こうして $\boldsymbol{a}$ の α 倍には位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の α 倍が対応する。

図 6　スカラー倍



6.5　ベクトルと位置ベクトルの対応

$\mathbb{R}^2$ の各ベクトルには、和, スカラー倍の演算を含めて平面上の位置ベクトルが 1 対 1 に対応する。

同様な対応は $\mathbb{R}^3$ の各ベクトルと 3 次元空間の位置ベクトルに対しても考えることができる。

位置ベクトルにはそれと等しい有向線分の組としての幾何ベクトルが一意に結び付けられるから $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ のベクトルに幾何ベクトルとしての意味を与えることもできる。

図形的イメージに基づいて、線型結合, 線型独立, 線型従属という概念の図形的なイメージを考察する。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}^3$ のベクトルであるが、それらは同時に、図表平面あるいは座標空間の位置ベクトルとして表現されるものとする。

　$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする。

　$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ とすれば、スカラー α に対して

$$\alpha\ \boldsymbol{a} = \alpha\ \overrightarrow{OA} \tag{9}$$

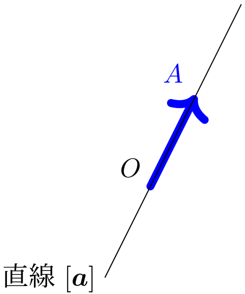
は $\overrightarrow{OA}$ を含む直線上に終点を持つ有向線分になる。

　この直線は $\boldsymbol{a}$ によって決定されるから

$$[\boldsymbol{a}] \tag{10}$$

という記号であらわす。

図 7　$[\boldsymbol{a}]$ と $\boldsymbol{a}$



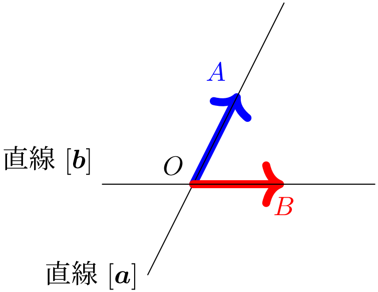
　このとき、原点 O を始点として直線 $[\boldsymbol{a}]$ 上に終点を持つ有向線分の全体は、α を任意のスカラーとする $\alpha\boldsymbol{a}$ の全体になるから $\boldsymbol{a}$ を基底とする 1 次元ベクトル空間を形成する。

　次に、終点が $[\boldsymbol{a}]$ 上にない有向線分 $\overrightarrow{OB}$ をとり、

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} \tag{11}$$

とすれば、$\boldsymbol{b}$ は $\alpha\boldsymbol{a}$ の形にかけないから**線型独立**である。$[\boldsymbol{b}]$ 上に終点を持つ位置ベクトルの全体も 1 次元ベクトル空間になる。

図 8　ベクトル空間の意味



直線 $[\boldsymbol{a}]$ と直線 $[\boldsymbol{b}]$ は原点 O で交わり、これらを共に含む平面はただ一つ確定する。この平面を $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ であらわす。

この平面上に任意に点 C をとり

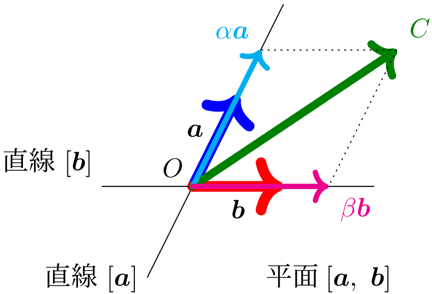
$$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC} \tag{12}$$

とすれば、適当に $\alpha,\ \beta$ を選んで

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \tag{13}$$

と書くことができる。

図 9　$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ 平面



点 C を通り直線 $[\boldsymbol{b}]$ と平行な直線が $[\boldsymbol{a}]$ と交わる点を A' とし、点 C を通り直線 $[\boldsymbol{a}]$ と平行な直線が $[\boldsymbol{b}]$ と交わる点を B' すれば、有向線分の和の定義により

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} \tag{14}$$

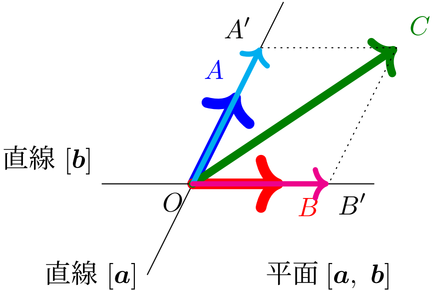
であり、$\overrightarrow{OA'}$ は直線 $[\boldsymbol{a}]$ 上にあるから

$$\overrightarrow{OA'} = \alpha\,\overrightarrow{OA} \tag{15}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \beta\,\overrightarrow{OB} \tag{16}$$

を満たす、α β がある。

図 10　$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$



6.6　線型従属の幾何学的意味

平面 $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ 上に終点を持つ、どんな位置ベクトル $\boldsymbol{c}$ をとっても $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は線型従属であり、逆に $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が線型従属であれば、これらは 1 つの平面に含まれてしまうことを示している。

$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の役割を入れ替えることは自由だから、$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が線型従属であることは、幾何学的には $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ のうちの 2 つが定める平面に他の 1 つが含まれることを意味する。これは

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\text{ が線型従属である。}\Longleftrightarrow \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\text{ が同じ平面上にある。} \tag{17}$$

ということができる。そして、対偶命題をとれば、

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\text{ が同じ平面上にない。}\Longleftrightarrow \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\text{ が線型独立である。} \tag{18}$$

6.7 $\mathbb{R}^n$ への拡張

$n \geqq 4$ のときの $\mathbb{R}^n$ のベクトルについて考える。$n \geqq 4$ のときは n 次元空間の図形を目で見ることはできない。しかし扱っているのは矢印で示される有向線分である。矢印でかかれる線分であれば、それはどのような次元の空間の中でも同じ形と考えることができる。

$\mathbb{R}^n$ の各ベクトルは n 個の実数の組である。

原点 O を通り、かつ、どの 2 つも互いに直交する n 本の直線を考え、これらを座標軸に持つ空間の中に座標を入れたと考える。これによってこの空間内に n 個の実数の組からなる座標を与えることができる。座標 $(a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n)$ を持つ点を A とする。座標軸の原点の座標は $(0, 0, 0, \cdots, 0)$ である。

点 O を始点とし A を終点とする有向線分 $\overrightarrow{OA}$ が $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

である。

別のベクトル $\boldsymbol{b}$ をあらわす $\overrightarrow{OB}$ をとったとき、$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を隣り合う辺とする平行四辺形のもう一つの頂点を C として、$\overrightarrow{OC}$ によって定義する。スカラー α に対する $\alpha\,\boldsymbol{a}$ も同様に考える。このように考えると、$\mathbb{R}^n$ に幾何学的なイメージを与えることができる。

線型結合, 線型独立, 線型従属のイメージも同様にして与えることができる。二つのベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ が線型従属であることは、これらが一直線上にあることであり、線型独立であることは、これらが一直線上にない事である。

6.8　まとめ

- ベクトルを位置ベクトルに対応させることができる。
- $\mathbb{R}^2$ のベクトルに対応する位置ベクトルの組が同じ平面上にあれば線型従属である。
- 対偶をとると、同じ平面上にないベクトルの組は線型独立である。
- $\mathbb{R}^n$ でも同じことである。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著 「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版