第 IV 部　ベクトル

目次

5　ベクトル空間の次元と基底

5.1　はじめに

- ベクトル空間から線型独立なベクトルを選びます。
- 最大で何個選べるでしょうか？
- 選び方は無数にありますが、最大個数は決まっています。

5.1.1　ポイント

- V から選ぶことのできる線型独立なベクトルの個数
- ベクトル空間の次元
- 基底
- 基底ベクトル

5.1.2　線型独立・線型従属の定義

定義

ベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ に対して

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1}+\alpha_2\boldsymbol{a_2}+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{a_{m1}} \tag{1}$$

が成り立つのは

$$\alpha_1=\alpha_2=\ \cdots\ =\alpha_m=0 \tag{2}$$

に**限る**とき $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は『**線型独立**』であるという。

定義

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が線型独立でないとき『**線型従属**』であるという。

問題 IV$-\mathbf{5}-\mathbf{1}$

線型従属の定義を『線型独立』という語を使わずにあらわしなさい。

5.1.3　線型独立・線型従属の定理

定理 IV−4 − 1

m 個のベクトル $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ が**線型従属**であるための必要十分条件は、これらのうちの少なくとも 1 つを、その他の $(m-1)$ 個のベクトルの線型結合としてあらわすことが**できる**ことである。

m 個のベクトル $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ が**線型独立**であるための必要十分条件は、これらのうちの少なくとも 1 つを、その他の $(m-1)$ 個のベクトルの線型結合としてあらわすことが**できない**ことである。

定理 IV−4 − 2

ただ 1 つのベクトルが**線型従属**であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であることである。
ただ 1 つのベクトルが**線型独立**であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ であることである。

定理 IV−4 − 3

m 個の m 次元ベクトルを行として行列式を作ったとき行列式の値が 0 でなければ、
$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$,$\boldsymbol{a_m}$ は**線型独立**である。

定理 IV−4 − 4

$\boldsymbol{a_1}$，$\boldsymbol{a_2}$，$\cdots$ ，$\boldsymbol{a_m}$ が**線型独立**であるとき

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m} = \beta_1\boldsymbol{a_1} + \beta_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \beta_m\boldsymbol{a_m} \tag{3}$$

であれば、$\alpha_i = \beta_i \qquad ; i = 1, 2, \cdots, m$ である。

定理 IV−4 − 5

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ が**線型独立**であれば、これらの内の一部分 $\boldsymbol{a_{i1}}, \boldsymbol{a_{i2}}, \cdots, \boldsymbol{a_{ik}}$ は**線型独立**である。

定理 IV–4 – 5 系 1

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ の内の一部分 $\boldsymbol{a_{i1}}, \boldsymbol{a_{i2}}, \cdots, \boldsymbol{a_{ik}}$ は**線型従属**であれば、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ が**線型従属**である。

定理 IV–4 – 5 系 2

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ の内に $\boldsymbol{0}$ が含まれていれば**線型従属**である。

定理 IV–4 – 6

m 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m}$ が**線型独立**であれば、$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m}$ に k 個の成分を付け加えた $(n+k)$ 次元ベクトル $\overline{\boldsymbol{a_1}},\ \overline{\boldsymbol{a_2}},\ \cdots,\ \overline{\boldsymbol{a_m}}$ も**線型独立**である。

定理 IV−4 − 6 系

n 次元ベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が**線型従属**であれば、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ から同じ位置にある k 個の成分を取り去って得られる $(n-k)$ 次元ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{a_1}}$, $\widetilde{\boldsymbol{a_2}}$, $\cdots$,$\widetilde{\boldsymbol{a_m}}$ も**線型従属**である。

定理 IV−4 − 7

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が**線型独立**であり、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$,$\boldsymbol{b}$ が**線型従属**であれば、$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の線型結合としてあらわされる。

定理 IV−4 − 8

m 個のベクトルの線型結合を $(m+1)$ 個作ると、それらは**線型従属**である。

定理 IV−4 − 8 系 1

m 個のベクトルの線型結合を $(m+1)$ 個以上作れば、それらは**線型従属**である。

定理 IV−4 − 8 系 2

n 次元ベクトルを $(n+1)$ 個以上持ってくれば、それらは**線型従属**である。

5.2　基底と基底ベクトル

ベクトル空間 V の中から次々線型独立なベクトルを選ぶとき、選ぶことのできる最大の個数を考える。

V が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であれば、V の要素は全て n 次元ベクトルだから、

定理 IV$-4-8$ 系 2 により、その中の $(n+1)$ 個をとれば、必ず線型従属になってしまう。したがって線型独立なベクトルは、高々[1] n 個までしか選ぶことができない。

1）もっとも多く見積もったとしてもという意味。

5.2.1 選択可能な $\boldsymbol{a_k} \in V$ の数

V は $\mathbf{0}$ 以外のベクトルを含むと仮定する。

まず、$\boldsymbol{a_1} \neq \mathbf{0}$ である $\boldsymbol{a_1} \in V$ を 1 つ選ぶ。

この $a\boldsymbol{a_1}$ は $\boldsymbol{a_1} \neq \mathbf{0}$ だから線型独立なので、任意のスカラー α_1 に対して

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} \in V \tag{4}$$

である。

このとき、V の中に $\alpha_1 \boldsymbol{a_1}$ の形にかくことのできないベクトルがあればその一つを $\boldsymbol{a_2}$ とする。$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ は線型独立であり、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2} \in V$ だから任意の α_1, α_2 に対して、

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} \in V \tag{5}$$

である。

ここで、また、$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2}$ の形に書くことのできないベクトルがあれば、その一つを $\boldsymbol{a_3}$ とする。$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ は線型独立であり、任意の α_1, α_2, α_3 に対して、

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \alpha_3 \boldsymbol{a_3} \in V \tag{6}$$

である。

　このようにして次々新しい $\boldsymbol{a_k}$ を選んで付け加えてゆく手続が

$$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m} \tag{7}$$

まで終了したとする。このとき

$$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m} \in V \tag{8}$$

は線型独立であって、任意の $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ に対し

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a_m} \in V \tag{9}$$

である。そして V の中には

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a_m} \tag{10}$$

にかけないベクトルは存在しない。したがって、V は

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a_m} \tag{10}$$

の形のベクトル全体の集合になる。

5.2.2 選択可能な $\boldsymbol{b_h} \in V$ の数

$\boldsymbol{a_1}$ と異なる $\boldsymbol{0}$ でないベクトルからスタートして同様な手続きを進めることも当然できる。この場合でも最終的にえられる線型独立なベクトルの個数はやはり m である。

$\boldsymbol{a_1}$ と異なる $\boldsymbol{b_1} \in V, \boldsymbol{b_1} \neq \boldsymbol{0}$ からスタートして上記の手続きによって線型独立なベクトルを V の中から次々選び l 個のベクトル $\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b_l}$ まできたときに、この手続きが終了したとする。

このとき

$$\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b_l} \in V \tag{11}$$

は線型独立であって、任意の $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\ ,\ \beta_l$ に対して、

$$\beta_1\boldsymbol{b_1} + \beta_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + \beta_l\boldsymbol{b_l} \in V \tag{12}$$

である。

しかも V には

$$\beta_1\boldsymbol{b_1}+\beta_2\boldsymbol{b_2}+\cdots+\beta_l\boldsymbol{b_l} \tag{13}$$

にかけないベクトルは存在しないから V は

$$\beta_1\boldsymbol{b_1}+\beta_2\boldsymbol{b_2}+\cdots+\beta_l\boldsymbol{b_l} \tag{13}$$

の形のベクトル全体の集合である。

5.2.3 $\boldsymbol{a_m}$ と $\boldsymbol{b_l}$ の数

$l>m$ と仮定する。

$$\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b_l}\in V \tag{11}$$

であるから、これらは全て

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1}+\alpha_2\boldsymbol{a_2}+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{a_m} \tag{10}$$

の形にかける。

従って、定理 IV–4 – 8 により、その中の $m+1$ 個

$$\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b_{m+1}} \tag{14}$$

は線型従属になる。すると、定理 IV–4 – 5 系 1 により、線型従属である (14) を含む

$$\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b_l} \tag{15}$$

は線型従属になる。ところで、(15) は線型独立であったからこれは矛盾である。

全く同様にして $l < m$ と仮定しても矛盾が生じる。よって

$$l = m \tag{16}$$

で無くてはならない。

問題 IV$-\mathbf{5}-\mathbf{1}$

$l < m$ と仮定したときに矛盾が生ずることを示しなさい。

定理 IV−5 − 1

ベクトル空間 V から最大限 m 個の線型独立なベクトルを選ぶことができるものとし、それらを

$$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m} \tag{17}$$

とする。このとき、V は $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m}$ の線型結合の全体になる。線型独立なベクトルの選び方はいろいろあるが、どのように選んでもそれらの最大個数は m である。

定義

V から選ぶ事のできる線型独立なベクトルの最大個数を V の『**次元**』といい V の次元を

$$\dim V \tag{18}$$

であらわす。$\dim V = m$ のとき、V を『$\boldsymbol{m}$ **次元ベクトル空間**』といい、V から選ばれた m 個の線型独立なベクトルの組を『**基底**』といい、基底を構成するベクトルを『**基底ベクトル**』という。基底の選び方は何通りもある。

例 1

$\mathbb{R}^n$ の基本単位ベクトル[2)] $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である。

2)　第 i 成分が 1 でそれ以外が 0 の n 次元ベクトル。

例 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{19}$$

であるとき、それぞれの行を成分とするベクトル[3]

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{22}$$

の組は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、$\dim \mathbb{R}^n = n$ である。

3)　列を成分とするベクトルでも同様。

例 3

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ で

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{23}$$

を満たすものの全体を V とする。

(23) を満たす任意のベクトルを

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} \tag{24}$$

とする。

$$\boldsymbol{a_1} \neq \boldsymbol{0} \tag{25}$$

でなければ何でもいいので、

$$x_{11} = 1 \tag{26}$$

$$x_{13} = 0 \tag{27}$$

とすると

$$x_{12} = -1 \tag{28}$$

なので

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

(29) であらわすことのできないベクトルを

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \tag{30}$$

とする。

$$x_{23} \neq 0 \tag{31}$$

であればよいので、

$$x_{23} = 1 \tag{32}$$

とし、(23) を満たすように x_{21}, x_{22} を決めて

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

とする[4)]。

これ以上、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ の線型結合であらわすことのできるベクトルはないので

$$\dim V = 2 \tag{34}$$

である。

4) $x_{21} + x_{22} = -1$ ならなんでも構わない。

そして、V の一組の基底は

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

である。

定理 IV−5 − 2

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ を V の基底とし、これとは別に V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_k}$;$k < m$ を**任意に**選ぶ。このとき $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の中から、**適当に** $m-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{a_{i_1}}$, $\boldsymbol{a_{i_2}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_{i_{m-k}}}$ を選んで

$$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a_m},\ \boldsymbol{a_{i_1}},\ \boldsymbol{a_{i_2}},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a_{i_{m-k}}} \tag{35}$$

を V の基底にすることができる。

証明

$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}$ の線型独立となっているベクトルの中から線型独立なものは高々 k 個しか選べない (定理 IV−4−8)。従って、$k < m$ だから、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ の中には $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}$ の線型結合として書けないベクトルが少なくとも一つある。それを $\boldsymbol{a_{i_1}}$ とする。このとき $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{a_{i_1}}$ は V の線型独立なベクトルである。

$k+1 < m$ であれば、同様に考えて、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ の中には、$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{a_{i_1}}$ であらわせないベクトルを選ぶことができる。それを $\boldsymbol{a_{i_2}}$ とする。

$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{a_{i_1}}, \boldsymbol{a_{i_2}}$ は V の $k+2$ 個の線型独立なベクトルである。

$k+2 < m$ であれば、更に同様な手続を進めることができる。

こうして

$$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{a_{i_1}}, \boldsymbol{a_{i_2}}, \cdots, \boldsymbol{a_{i_{m-k}}}$$

が線型独立であるような

$$\boldsymbol{a}_{i_1},\ \boldsymbol{a}_{i_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a}_{i_{m-k}}$$

を

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a}_m$$

から選ぶことができる。

$$\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b}_k,\ \boldsymbol{a}_{i_1},\ \boldsymbol{a}_{i_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a}_{i_{m-k}}$$

は線型独立で、その個数は m 個であるから、これらは V の基底である。（終）

例題 IV−**5 − 1**

$\mathbb{R}^3$ のなかで、$x_1 + x_2 = 0$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ の全体を V とする。

(i) V は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であって、$\dim V = 2$ であることを示せ。

(ii) V の基底を一組求めよ。

解法 IV−**5 − 2**

V は基底を

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする二次元部分空間である。

例題 IV$-\mathbf{5-2}$

$\mathbb{R}^4$ のなかで、$x_1+x_3=0,\ x_2+x_4=0$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ の全体を V とする。

(i) V は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であって、$\dim V = 2$ であることを示せ。

(ii) V の基底を一組求めよ。

解法 IV$-\mathbf{5-2}$

V は基底を

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする二次元部分空間である。

問題 IV−5 − 2

$\mathbb{R}^4$ のなかで、$x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ の全体を V とする。

(i)　V は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であって、$\dim V = 2$ であることを示せ。

(ii)　V の基底を一組求めよ。

解例 IV$-\mathbf{5-2}$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

を満たす線型独立な

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

の組を作ればよい。

基底はいくらでもある。たとえば、

V は基底を

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とする二次元部分空間である。

5.3　まとめ

- ベクトル空間 V から選ぶことのできる線型独立なベクトルの最大個数を**次元**といい $\dim V$ とあらわす。
- $\dim V = m$ のとき V を $\boldsymbol{m}$ **次元ベクトル空間**という。
- V から選ばれた m 個の線型独立なベクトルを**基底**といい、基底を構成するベクトルを**基底ベクトル**という。
- 基底の選び方は何通りもある！

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版

9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著 「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版

10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版

11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版