第 IV 部　ベクトル

目次

4 線型独立・線型従属

4.1 はじめに

- 定義を理解することは重要です。
- 覚えることは重要ですが、覚えるだけでは理解にたどり着きません。
- 定義からいくつかのことを導きます。
- それを通じて、定義を深く理解します。

4.1.1 ポイント

- 命題の否定
- 否定の否定
- 命題と対偶
- 線型独立と線型従属

4.1.2 命題とは

- 正しいか、正しくないかを数学的に判断できる文のことをいう。
- P を条件,Q を結論として

$$P \implies Q \tag{1}$$

とあらわす。

- 命題が正しい場合、その命題は『真(しん)』であるといい、正しくない場合、その命題は『偽(ぎ)』であるという。
- 真の場合、正しいことを示さなくてはならない。
- 偽の場合、反例を上げることで偽であることが示される。

4.1.3 命題の否定

- 文章の内容を打ち消すことを『否定』という。
- P の否定を P^C とあらわし、Q の否定を Q^C とあらわす。

4.1.4 否定の否定

否定の否定は、

$$\left(P^C\right)^C \tag{2}$$

である。そして、P の否定の否定は P である。

4.1.5 命題と対偶

命題を

$$P \implies Q \tag{1}$$

とすると、

$$Q^C \implies P^C \tag{3}$$

を『対偶（たいぐう）』という。

命題と対偶の真偽は一致する。

命題が真であることを示す場合、対偶が真であることを示せばよい。

4.1.6 線型結合

m 個のベクトル[1)]

$$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m} \tag{4}$$

が与えられたとき、m 個のスカラー[2)]

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_m \tag{5}$$

に対して

1) ベクトルは太字の小文字であらわす。
2) スカラーは細字の小文字であらわす。

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ \cdots\ + \alpha_m\boldsymbol{a_m} \tag{6}$$

の形にかかれるベクトルを $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の『線型結合』という。α_1, α_2, $\cdots$ α_m を、この線型結合の『係数』という[3)]。

3) 係数の場合、基本的にギリシャ文字をつかってあらわす。

問題 IV$-\mathbf{4}-\mathbf{1}$

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}7 & 2 & 9\end{pmatrix}$$

とする。

(i) $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ の線型結合としてあらわしなさい。

(ii) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ の線型結合としてあらわしなさい。

(iii) $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の線型結合としてあらわしなさい。

解例 IV−4 − 1

(i) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$

(ii) $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$

(iii) $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$

4.2　線型独立・線型従属

4.2.1　線型従属

3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \tag{9}$$

をとる。

これら 3 つのベクトルの間には

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} \tag{12}$$

の関係があることが確認できる。$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のうちの 1 つを、その他の 2 つのベクトルの線型結合としてあらわすことができる。

線型結合による相互の結びつきがあるベクトルの集合は『線型従属』であるという。

4.2.2 $\mathbb{R}^3$ の基本単位ベクトルの線型結合

$\mathbb{R}^3$ の基本単位ベクトル

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

では、これらのうちの 1 つ、例えば $\boldsymbol{e_3}$ を、その他の 2 つのベクトル $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ の線型結合としてあらわすことはできない。

$\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ の線型結合は全て

$$\alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

とあらわすことができるが、(16) の第 3 成分は必ず 0 になっている。一方、(15) の第 3 成分は 1 なので、$\boldsymbol{e_3}$ を $\alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2}$ とあらわすことはできない。同様に $\boldsymbol{e_1}$ を $\alpha_2\boldsymbol{e_2} + \alpha_3\boldsymbol{e_3}$ とあらわすことはできないし、$\boldsymbol{e_2}$ を $\alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_3\boldsymbol{e_3}$ とあらわすこともできない。

4.2.3　線型独立

m 個のベクトル

$$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a_m} \tag{4}$$

が与えられたとき、これらの間に線型結合による相互の結びつき（従属関係）があるとき、これらのベクトルは『線型従属』であるといい、この種の従属関係がないとき、これらのベクトルは『線型独立』であるという。

(4) のベクトルの間に従属関係があるかどうかは、(4) のベクトルのうちの少なくとも 1 つが、その他の $m-1$ 個のベクトルの線型結合としてかけるかどうかによって判定される。

ところで、上記の表現によって『線型従属』『線型独立』を定義するとベクトルの個数が $m \geqq 2$ である場合に限られる。[4)]

4)　$m=1$ の場合に「その他の $m-1$ 個のベクトル」が存在しないから。

定義

ベクトル $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \ldots\ ,\ \boldsymbol{a_m}$ に対して

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ \cdots\ + \alpha_m\boldsymbol{a_m} = \mathbf{0} \tag{17}$$

が成り立つのは

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \tag{18}$$

に**限る**とき、$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \ldots\ ,\ \boldsymbol{a_m}$ は『**線型独立**』であるという。
$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \ldots\ ,\ \boldsymbol{a_m}$ が線型独立でないとき『**線型従属**』であるという。

従って、線型従属とは

(i)　係数 $\alpha_1,\ \alpha_1,\ \cdots\ ,\alpha_1$ の中に 0 でないものがある

(ii)　$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} +\ \cdots\ + \alpha_m\boldsymbol{a_m} = \mathbf{0}$ が成り立つ

を同時に満たす場合をいう。

4.2.4　命題と対偶（再）

「線型独立でないならば線型従属である。」に対する対偶は「線型従属でなければ、線型独立である。」である。

4.2.5　ベクトルが線型独立であることの証明方法

与えられたベクトルが線型独立であることを証明するためには

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \ \cdots \ + \alpha_m \boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

となるように、係数を選んだと仮定して、この仮定から

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \tag{18}$$

という結論を導くことができればよい。

4.3　定理 IV$-4-1$

$m \geqq 2$ とする。このとき

(i)　$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots\ ,\boldsymbol{a_m}$ が『**線型従属**』であるための必要十分条件は、これらのうちの少なくとも 1 つ $\boldsymbol{a_k}$ を、その他の $m-1$ 個のベクトルの線型結合としてあらわすことが**できる**ことである。

(ii)　$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots\ ,\boldsymbol{a_m}$ が『**線型独立**』であるための必要十分条件は、これらのうちの少なくとも 1 つ $\boldsymbol{a_k}$ を、その他の $m-1$ 個のベクトルの線型結合としてあらわすことは**できない**ことである。

証明

(i) **必要性の証明**

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$; $m \geqq 2$ が線型従属であるとする。

このとは 0 でない数を含む係数の組

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ ,\ \alpha_m \tag{5}$$

を (17) が成り立つように選ぶことができる。

そこで (5) のうちの 0 でない数の 1 つが α_k であるとする。

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_{k-1}\boldsymbol{a_{k-1}} + \alpha_k\boldsymbol{a_k} + \alpha_{k+1}\boldsymbol{a_{k+1}} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0} \qquad ; a_k \neq 0 \tag{19}$$

が成り立っている。

$\alpha_k \boldsymbol{a_k}$ 以外の項を右辺に移項すると、

$$\alpha_k \boldsymbol{a_k} = -\alpha_1 \boldsymbol{a_1} - \cdots - \alpha_{k-1} \boldsymbol{a_{k-1}} - \alpha_{k+1} \boldsymbol{a_{k+1}} - \cdots - \alpha_m \boldsymbol{a_m} \tag{20}$$

$\alpha_k \neq 0$ なので両辺を α_k で割ることができる。すると

$$\boldsymbol{a_k} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\boldsymbol{a_1} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\boldsymbol{a_{k-1}} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\boldsymbol{a_{k+1}} - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_k}\boldsymbol{a_m} \tag{21}$$

である。これは、$\boldsymbol{a_k}$ がその他の $\boldsymbol{a_1}, \cdots \boldsymbol{a_{k-1}}, \boldsymbol{a_{k+1}}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ の線型結合になっていることを示している。

(i) **十分性の証明**

　$\boldsymbol{a_k}$ がその他の $m-1$ 個のベクトルの線型結合として

$$\boldsymbol{a_k} = \alpha_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_{k-1}\boldsymbol{a_{k-1}} + \alpha_{k+1}\boldsymbol{a_{k+1}} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m} \tag{22}$$

とあらわされたとする。左辺を右辺に移項すると

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_{k-1}\boldsymbol{a_{k-1}} + (-1)\boldsymbol{a_k} + \alpha_{k+1}\boldsymbol{a_{k+1}} + \cdots + \alpha_m = \boldsymbol{0} \tag{23}$$

となる。

　この式は

$$\alpha_1,\ \cdots\ ,\alpha_{k-1},\ -1,\ \alpha_{k+1},\ \cdots\ ,\alpha_m \tag{24}$$

を係数とする $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の線型結合が $\mathbf{0}$ になることを示している。0 を含まない数を含む係数の組によって (17) が成り立つことになるから、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型従属である。

(ii) **証明**

　線型従属でないときが線型独立なのであるから (i) から明らかである。

(終)

4.4　定理 IV−4 − 2

(i)　ただ 1 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ が線型従属であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{25}$$

であることである。

(ii)　ただ 1 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ が線型独立であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \tag{26}$$

であることである。

証明

必要性の証明

$\boldsymbol{a}$ が線型従属であれば、$\alpha \neq 0$ を

$$\alpha \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \tag{27}$$

となるように選ぶことができる。両辺を α で割れば

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \tag{28}$$

を得る。

十分性の証明

$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ であれば、$\alpha \neq 0$ に対して

$$\alpha \boldsymbol{a} = \alpha \mathbf{0} \tag{29}$$

$$= \mathbf{0} \tag{30}$$

である。よって $\mathbf{0}$ は線型従属である。

(終)

4.5　定理 IV−4 − 3

m 個の m 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\boldsymbol{a_m} = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \tag{33}$$

を行として行列式を作ったとき

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{34}$$

であれば、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型独立である。

証明

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1}+\alpha_2\boldsymbol{a_2}+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{a_m}=\boldsymbol{0} \qquad (17)$$

となるように、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ を選ぶ。

この関係を各成分ごとに書くと、

$$\alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{21}+\cdots+\alpha_m a_{m1}=0 \qquad (35)$$

$$\alpha_1 a_{12}+\alpha_2 a_{22}+\cdots+\alpha_m a_{m2}=0 \qquad (36)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 a_{1n}+\alpha_2 a_{2n}+\cdots+\alpha_m a_{mm}=0 \qquad (37)$$

これは、α_1, α_2, $\cdots$, α_m を未知数とする同次連立 1 次方程式である。

仮定により左辺の係数の行列式は 0 ではないから Cramer の公式により解を求めれば、

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=0 \qquad (18)$$

となる。

よって $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型独立である。

(終)

4.5.1 定理 IV−4 − 3 の逆

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型独立であるとし

$$\boldsymbol{b_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{12}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{1m}\boldsymbol{a_m} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{b_2} = \alpha_{21}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{22}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{2m}\boldsymbol{a_m} \tag{39}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{b_m} = \alpha_{m1}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{m2}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{mm}\boldsymbol{a_m} \tag{40}$$

とおく。

このとき

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{41}$$

であれば、$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$,$\boldsymbol{b_m}$ は線型独立である。

証明

$$\beta_1\boldsymbol{b_1}+\beta_2\boldsymbol{b_2}+\ \cdots\ +\beta_m\boldsymbol{b_m}=\mathbf{0} \tag{42}$$

となるように、$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\ ,\ \beta_m$ を選ぶ。

$\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ \boldsymbol{b_m}$ の定義式 (38) (39) $\cdots$ (40) を (42) 左辺に代入すると

$$\begin{aligned}&\beta_1(\alpha_{11}\boldsymbol{a_1}+\alpha_{12}\boldsymbol{a_2}+\cdots+\alpha_{1m}\boldsymbol{a_m})\\&+\beta_2(\alpha_{21}\boldsymbol{a_1}+\alpha_{22}\boldsymbol{a_2}+\cdots+\alpha_{2m}\boldsymbol{a_m})+\cdots\\&+\beta_m(\alpha_{m1}\boldsymbol{a_1}+\alpha_{m2}\boldsymbol{a_2}+\cdots+\alpha_{mm}\boldsymbol{a_m})\\&=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{43}$$

を得る。この左辺を $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_1},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a_m}$ についてまとめる。すると、

$$\begin{aligned}&(\beta_1\alpha_{11}+\beta_2\alpha_{21}+\cdots+\beta_m\alpha_{m1})\boldsymbol{a_1}\\&+(\beta_1\alpha_{11}+\beta_2\alpha_{22}+\cdots+\beta_m\alpha_{m2})\boldsymbol{a_2}+\cdots\\&+(\beta_1\alpha_{1m}+\beta_2\alpha_{2m}+\cdots+\beta_m\alpha_{mm})\boldsymbol{a_m}\\&=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{44}$$

となるが、仮定により、$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a_m}$ は線型独立であった。

よって、

$$\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{21} + \cdots + \beta_m\alpha_{m1} = 0 \tag{45}$$

$$\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{22} + \cdots + \beta_m\alpha_{m2} = 0 \tag{46}$$

$$\vdots$$

$$\beta_1\alpha_{1m} + \beta_2\alpha_{2m} + \cdots + \beta_m\alpha_{mm} = 0 \tag{47}$$

でなくてはならない。

これは、β_1, β_2, $\cdots$, β_m を未知数とする同次連立１次方程式である。

係数の行列式 (41) は仮定により 0 ではないから、

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0 \tag{48}$$

である。よって、$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_m$ は線型独立である。

(終)

4.6 定理 IV—4 − 4

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が線型独立であるとき

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m} = \beta_1\boldsymbol{a_1} + \beta_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \beta_m\boldsymbol{a_m} \tag{49}$$

であれば、

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots,\ \alpha_m = \beta_m \tag{50}$$

である。

証明

(49) の右辺を左辺に移項して $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ についてまとめると。

$$(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{a_1}+(\alpha_2-\beta_2)\boldsymbol{a_2}+\cdots+(\alpha_m-\beta_m)\boldsymbol{a_m}=0 \tag{51}$$

をなる。仮定により、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が線型独立であるから

$$\alpha_1-\beta_1=0,\quad \alpha_2-\beta_2=0,\quad \cdots\quad ,\quad \alpha_m-\beta_m=0 \tag{52}$$

でなくてはならない。よって

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_2,\quad \cdots\quad ,\quad \alpha_m=\beta_m \tag{50}$$

である。(終)

4.7　定理 IV−4 − 5

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が線型独立であれば、これらのうちの一部分 $\boldsymbol{a_{i1}}$, $\boldsymbol{a_{i2}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_{ik}}$ は線型独立である。

証明

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_{i1}} + \alpha_2 \boldsymbol{a_{i2}} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a_{ik}} = \boldsymbol{0} \tag{53}$$

となるように α_1, α_2, $\cdots$, α_{ik} を選ぶ。(53) の左辺に、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の $\boldsymbol{a_{i1}}$, $\boldsymbol{a_{i2}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_{ik}}$ 以外のベクトルに係数 0 をかけたものを加えてもやはり $\boldsymbol{0}$ だから

$$0_{a_1} + \cdots + \alpha_{i1} \boldsymbol{a_{i1}} + \cdots + 0 \boldsymbol{a_j} + \cdots + \boldsymbol{a_{i2}} + \cdots + \alpha_{ik} \boldsymbol{a_{ik}} + \cdots + 0 \boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0} \tag{54}$$

が成り立つ。

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型独立だから、(54) の係数は全て 0 でなくてはならない。よって、

$$\boldsymbol{a_{i1}} = \boldsymbol{a_{i2}} = \cdots = \boldsymbol{a_{ik}} = 0 \tag{55}$$

となるから、$\boldsymbol{a_{i1}}$, $\boldsymbol{a_{i2}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_{ik}}$ は線型独立である。（終）

4.7.1 定理 IV—$\mathbf{4-5}$ 系 1

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の一部分 $\boldsymbol{a_{i1}}$, $\boldsymbol{a_{i2}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_{ik}}$ が線型従属であれば、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型従属である。

証明

定理 IV—$\mathbf{4-5}$ の対偶は、

「$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の一部分 $\boldsymbol{a_{i1}}$, $\boldsymbol{a_{i2}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_{ik}}$ が線型独立でないならば、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型独立でない。」

である。これが系 1 の命題である。

命題と対偶の真偽は一致する。定理 IV—$\mathbf{4-5}$ が成り立つのだから対偶命題である本命代も成り立つ。(終)

4.7.2 定理 IV$-4-5$ 系 2

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の中に $\mathbf{0}$ が含まれていれば、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型従属である。

証明

- 定理 IV$-4-2$ より、$\mathbf{0}$ は単独で線型従属である。
- 定理 IV$-4-5$ 系 1 より、線型従属を含めば線型従属である。
- 線型従属である $\mathbf{0}$ を含んでいるのだから、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ は線型従属である。

(終)

4.8 定理 IV—$4-6$

n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$\boldsymbol{a_m} = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{58}$$

のそれぞれに任意に k 個の成分を付け加えて $n+k$ 次元ベクトル

$$\overline{\boldsymbol{a_1}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$\overline{\boldsymbol{a_2}} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\overline{\boldsymbol{a_m}} = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} \tag{61}$$

を作る。このとき。$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が線型独立であれば、$\overline{\boldsymbol{a_1}}$, $\overline{\boldsymbol{a_2}}$, $\cdots$, $\overline{\boldsymbol{a_m}}$ も線型独立である。

新たに付け加えられる成分の位置は、全てのベクトルに対して同じ位置であれば、どこであっても構わない。

証明

$$\alpha_1\overline{\boldsymbol{a_1}} + \alpha_2\overline{\boldsymbol{a_2}} + \cdots + \alpha_m\overline{\boldsymbol{a_m}} = \overline{\mathbf{0}} \tag{62}$$

となるように $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ をえらぶ。ここで、$\overline{\mathbf{0}}$ は $n+k$ 次元のゼロ・ベクトルである。両辺の第 1 成分から第 n 成分までをとれば

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m} = \mathbf{0} \tag{63}$$

となるが、仮定により $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m}$ は線型独立なので

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \tag{64}$$

でなくてはならない。よって、$\overline{\boldsymbol{a_1}},\ \overline{\boldsymbol{a_2}},\ \cdots,\ \overline{\boldsymbol{a_m}}$ は線型独立である。(終)

4.8.1　定理 IV−4 − 6 系

n 次元ベクトル $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ のそれぞれから、同じ位置にある k 個の成分を取り去って得られる $n-k$ 次元ベクトルを $\widetilde{\boldsymbol{a_1}}, \widetilde{\boldsymbol{a_2}}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{a_m}}$ とする。このとき、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ が線型従属であれば $\widetilde{\boldsymbol{a_1}}, \widetilde{\boldsymbol{a_2}}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{a_m}}$ も線型従属である。

証明

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ は $\widetilde{\boldsymbol{a_1}}, \widetilde{\boldsymbol{a_2}}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{a_m}}$ の同じ場所に k 個成分を付け加えて作られている。

従って、定理 IV−4 − 6 により $\widetilde{\boldsymbol{a_1}}, \widetilde{\boldsymbol{a_2}}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{a_m}}$ が線型独立であれば、$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ は線型独立になる。

ところが、仮定により $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ は線型従属であるから $\widetilde{\boldsymbol{a_1}}, \widetilde{\boldsymbol{a_2}}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{a_m}}$ 線型独立ではありえない。よって、線型従属である。(終)

4.9　定理 IV$-4-7$

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ が線型独立であり、これに $\boldsymbol{b}$ を付け加えた集合 $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$, $\boldsymbol{b}$ が線型従属であれば、$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の線型結合としてあらわされる。

証明

$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$, $\boldsymbol{b}$ が線型従属であるから 0 でない数を含む係数 α_1, α_2, $\cdots$, α_m, β を適当に選んで

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1}+\alpha_2\boldsymbol{a_2}+\ \cdots\ +\alpha_m\boldsymbol{a_m}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \tag{65}$$

とすることができる。このとき $\beta\neq 0$ でなくてはならない。

なぜなら、$\beta = 0$ であったとすると

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0} \tag{66}$$

となるが、このとき $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ の中に 0 でないものがあることになるから $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ が線型従属になってしまう。このことは $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ が線型独立であることと矛盾する。よって $\beta \neq 0$ である。(65) の $\beta\boldsymbol{b}$ 以外の項を右辺に移項し、両辺を β で割ると、

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\boldsymbol{a_1} - \frac{\alpha_2}{\beta}\boldsymbol{a_2} - \cdots + \frac{\alpha_m}{\beta}\boldsymbol{a_m} \tag{67}$$

となって、$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ の線型結合としてあらわすことができる。（終）

4.10 定理 IV−4 − 8

m 個のベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ の線型結合を $m+1$ 個作る。

それらを $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_m}$, $\boldsymbol{b_{m+1}}$ とすれば、$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{b_m}$, $\boldsymbol{b_{m+1}}$ は線型従属である。

証明

ベクトルの個数 m についての数学的帰納法で証明する。

(i) $m=1$ のとき、1 つのベクトル α の線型結合を 2 つ作る。それらを

$$\boldsymbol{b_1} = \alpha_1 \boldsymbol{a} \tag{68}$$

$$\boldsymbol{b_2} = \alpha_2 \boldsymbol{a} \tag{69}$$

とする。$\alpha_1 = 0$ のときは $\boldsymbol{b_1} = \mathbf{0}$ となるから、$\boldsymbol{b_1}$ は単独で線型従属である[5)]。よって $\boldsymbol{b_1}$，$\boldsymbol{b_2}$ は線型従属である[6)]。

$\alpha_1 \neq 0$ のときは、(68) は

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{\alpha_1}\boldsymbol{b_1} \tag{70}$$

なので、(69) に代入すると

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{b_1} \tag{71}$$

となる。よって、$\boldsymbol{b_1}$，$\boldsymbol{b_2}$ は線型従属である。

5）定理 IV–4 − 2

6）定理 IV–4 − 5 系 1

(ii)　$m = k-1$ のとき定理の主張は正しいものと仮定して（帰納法の仮定)、$m = k$ のときに定理の主張が正しいことを証明する。

そのために k 個のベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_k}$ の線型結合を $k+1$ 個作る。それらを、

$$\boldsymbol{b_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{12}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{1,k-1}\boldsymbol{a_{k-1}} + \alpha_{1k}\boldsymbol{a_k} \tag{72}$$

$$\boldsymbol{b_2} = \alpha_{21}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{22}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{2,k-1}\boldsymbol{a_{k-1}} + \alpha_{2k}\boldsymbol{a_k} \tag{73}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{b_k} = \alpha_{k1}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{k2}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{k,k-1}\boldsymbol{a_{k-1}} + \alpha_{kk}\boldsymbol{a_k} \tag{74}$$

$$\boldsymbol{b_{k+1}} = \alpha_{k+1,1}\boldsymbol{a_1} + \alpha_{k+1,2}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{k+1,k-1}\boldsymbol{a_{k-1}} + \alpha_{k+1,k}\boldsymbol{a_k} \tag{75}$$

とする。

$\boldsymbol{a_k}$ の係数が全て 0 である場合

これらの式の右辺の $\boldsymbol{a_k}$ の係数 α_{1k}，α_{2k}，$\cdots$，α_{kk}，$\alpha_{k+1,k}$ がすべて 0 である場合には $\boldsymbol{b_1}$，$\boldsymbol{b_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{b_k}$，$\boldsymbol{b_{k+1}}$ はどれも $\boldsymbol{a_1}$，$\boldsymbol{a_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{a_{k-1}}$ の線型結合になるから、帰納法の仮定より、このうち k 個 $\boldsymbol{b_1}$，$\boldsymbol{b_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{b_k}$ が線型従属になる。線型従属を含む $\boldsymbol{b_1}$，$\boldsymbol{b_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{b_k}$，$\boldsymbol{b_{k+1}}$ も線型従属になるから定理は証明されたことになる。

$\boldsymbol{a_k}$ の係数の中に 0 でないものがある場合

次に、α_{1k}，α_{2k}，$\cdots$，α_{kk}，$\alpha_{k+1,k}$ の中に 0 でないものがある場合を考える。一般性を失うことなく $\alpha_{k+1,k} \neq 0$ とする。そして、(75) を $\alpha_{k+1,k}$ で割って、

$$\frac{1}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}} = \frac{\alpha_{k+1,1}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{a_1} + \frac{\alpha_{k+1,2}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \frac{\alpha_{k+1,k-1}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{a_{k-1}} + \boldsymbol{a_k} \tag{76}$$

とする。この (76) を使って、それ以外の式から $\boldsymbol{a_k}$ を消去する。

(72) を例にすると

(76) に α_{1k} をかけて (72) から引くと

$$\boldsymbol{b_1} - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}} = \left(\alpha_{11} - \frac{\alpha_{k+1,1}\alpha_{1k}}{\alpha_{k+1,k}}\right)\boldsymbol{a_1} + \left(\alpha_{12} - \frac{\alpha_{k+1,2}\alpha_{1k}}{\alpha_{k+1,k}}\right)\boldsymbol{a_2}$$
$$+ \cdots + \left(\alpha_{1,k-1} - \frac{\alpha_{k+1,k-1}\alpha_{1k}}{\alpha_{k+1,k}}\right)\boldsymbol{a_{k-1}} \tag{77}$$

ここで、

$$\alpha_{ij}{}' = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{k+1,j}\alpha_{ik}}{\alpha_{k+1,k}} \tag{78}$$

とおくと、(77) は

$$\boldsymbol{b_1} - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}} = \alpha_{11}{}'\boldsymbol{a_1} + \alpha_{12}{}'\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{1,k-1}{}'\boldsymbol{a_{k-1}} \tag{79}$$

以下同様に、

$$\boldsymbol{b_2} - \frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}} = \alpha_{21}{}'\boldsymbol{a_1} + \alpha_{22}{}'\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{2,k-1}{}'\boldsymbol{a_{k-1}} \tag{80}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{b_k} - \frac{\alpha_{kk}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}} = \alpha_{k1}{}'\boldsymbol{a_1} + \alpha_{k2}{}'\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_{k,k-1}{}'\boldsymbol{a_{k-1}} \tag{81}$$

である。これら k 個の式の右辺は $k-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_{k-1}}$ の線型結合であるから、帰納法の仮定より、左辺の k 個のベクトルは線型従属である。

従って 0 でない数を含む係数 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\ ,\ \beta_k$ を適当に選んで

$$\beta_1\left(\boldsymbol{b_1}-\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}}\right)+\beta_2\left(\boldsymbol{b_2}-\frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}}\right)+\cdots+\beta_k\left(\boldsymbol{b_k}-\frac{\alpha_{kk}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}}\right)=\boldsymbol{0} \tag{82}$$

とすることができる。この (82) の左辺を $\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b_k},\ \boldsymbol{b_{k+1}}$ についてまとめ直すと

$$\beta_1\boldsymbol{b_1}+\beta_2\boldsymbol{b_2}+\cdots+\beta_k\boldsymbol{b_k}-\frac{\beta_1\alpha_{1k}+\beta_2\alpha_{2k}+\cdots+\beta_k\alpha_{kk}}{\alpha_{k+1,k}}\boldsymbol{b_{k+1}}=\boldsymbol{0} \tag{83}$$

仮定により $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\ ,\ \beta_k$ の中には 0 ではない数が含まれているから当然 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\ ,\ \beta_k,\ -\dfrac{\beta_1\alpha_{1k}+\beta_2\alpha_{2k}+\cdots+\beta_k\alpha_{kk}}{\alpha_{k+1,k}}$ の中には 0 でない数が含まれている。そして、(83) が成り立つのだから $\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b_k},\ \boldsymbol{b_{k+1}}$ は線型独立である。これで帰納法は完成した。(終)

4.10.1 定理 IV–4 – 8 系 1

m 個のベクトルの線型結合を $m+1$ 以上作れば、それらは線型従属である。

証明

- 定理 IV–4 – 8 により、m 個のベクトルの線型結合を $m+1$ 個作れば、それらは線型従属である。
- 定理 IV–4 – 5 系 1 により、線型従属を含めば、それらは線型従属である。

4.10.2 定理 IV−4 − 8 系 2

n 次元ベクトルを $n+1$ 個以上持ってくれば、それらは線型従属である。

証明

任意の n 次元ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{84}$$

は n 個の n 次元基本単位ベクトル $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{e_n}$ の線型結合として

$$\alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \alpha_2 \boldsymbol{e_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e_n} \tag{85}$$

と書くことができる。そして、$\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{e_n}$ の線型結合として書かれるベクトルを $m+1$ 個以上持ってくれば、定理 IV−4 − 8 系 1 により、それらは線型従属である。（終）

4.11　まとめ

- $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a_m}$ に対して

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0}$$

  が $\alpha_1 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_1 = 0$ に限り成り立つとき『線型独立』という。
- 線型独立でないとき、『線型従属』という。
- 線型独立・線型従属に関する定理を確認した。
- 線型独立・線型従属の理解は重要。
- 定理を通じて、線型独立・線型従属の理解を深めることが重要。

参考文献

1.『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2.『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3.『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4.『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5.『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6.『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7.『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版

9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版

10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版

11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版