第 IV 部　ベクトル

目次

3　線型結合

3.1　はじめに

- ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を定義しました。
- ベクトル $\boldsymbol{a}$ とスカラー α との積（スカラー倍）を定義しました。
- この和とスカラー倍を組み合わせた演算を、ベクトルの『線型結合』といいます。

3.1.1　ポイント

- 線型結合
- 基本単位ベクトル

3.2　線型結合

定義

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とスカラー α, β に対して

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \tag{1}$$

の形にかけるベクトルを、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の『線型結合』という。

より一般に、m 個のベクトル

$$\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m} \tag{2}$$

が与えられたとき、m 個のスカラー

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_m \tag{3}$$

に対して

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ \cdots\ + \alpha_m\boldsymbol{a_m} \tag{4}$$

の形にかかれるベクトルを $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_m}$ の『線型結合』という[1)]。

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_m$ を、この線型結合の『係数』という。係数の選び方はいく通りもあるから (2) のベクトルの線型結合はいく通りも作ることができる。

1）『1 次結合』ともいう

問題 IV$-\mathbf{3}-\mathbf{1}$

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

$$a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3}$$

を求めなさい。

解例 IV$-\mathbf{3-1}$

$$\begin{aligned}
a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+a_3\boldsymbol{e_3} &= a_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & a_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.2.1 例

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

とすれば、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

は, $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ の線型結合として、

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3} \tag{9}$$

とかくことができる。

3.3　基本単位ベクトル

$\boldsymbol{e_i}$ を、第 i 成分が 1 で、その他の成分がすべて 0 である n 次元ベクトルとする。

すなわち、

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

とする。このとき、n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

は

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e_n} \tag{14}$$

と書くことができる。この $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\cdots$ $\boldsymbol{e_n}$ を $\mathbb{R}^n$ の『基本単位ベクトル』という。

3.3.1　例

命題

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{17}$$

を並べて作る行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{18}$$

の値が 0 でないならば、すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{19}$$

ならば、任意の

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

を、$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ の線型結合として一意にあらわすことができる。

証明

$$x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + x_3\boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{b} \tag{21}$$

となるように x_1, x_2, x_3 の値を定めることができればよい。(21) を各辺の成分間の関係としてあらわせば

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} = b_1 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} = b_2 \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33} = b_3 \end{cases} \tag{22}$$

という連立方程式になる。(22) 左辺の係数の行列式が (18) である。仮定により、左辺の係数の行列式は 0 ではないので、Cramer の公式により x_1, x_2, x_3 の値は一意に決まる。よって $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$, の線型結合として一意的にあらわすことができる。(終)

問題 IV−**3 − 2**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする。連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} = b_2 \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33} = b_3 \end{cases}$$

を解きなさい。

解例 IV$-\mathbf{3}-\mathbf{2}$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

問題 IV**−3 − 3**

ベクトル $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の線型結合としてあらわしなさい。

解例 IV$-\mathbf{3}-\mathbf{3}$

$$
\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta & 5\beta & 6\beta \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 4\beta & 2\alpha + 5\beta & 3\alpha + 6\beta \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases} 7 = \alpha + 4\beta \\ 8 = 2\alpha + 5\beta \\ 9 = 3\alpha + 6\beta \end{cases}
$$

なので

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

問題 IV$-\mathbf{3}-\mathbf{4}$

　ベクトル $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ の線型結合としてあらわしなさい。

解例 IV$-\mathbf{3-4}$

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1
\end{vmatrix} = -2
$$

なので

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + 0 = 1 \\
x_1 + 0 + x_3 = 2 \\
0 + x_2 + x_3 = 3
\end{cases}
$$

とおく。

Cramer の公式より

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2} = 0, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4　まとめ

- m 個のベクトル $\boldsymbol{a_i}$ と m 個のスカラー α_i によって

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a_m} +$$

  とかけるベクトルを $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_m}$ の『線型結合』という。
- $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ ,\ \alpha_m$ を線型結合の『係数』という。
- 第 i 成分が 1 で、その他の成分が全て 0 である n 次元ベクトルを『基本単位ベクトル』という。

参考文献

1.『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2.『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3.『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版)』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4.『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5.『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6.『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7.『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷
8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版