第 IV 部　ベクトル

目次

2　ベクトル空間

2.1　はじめに

- ベクトル間の関係で、和とスカラー倍を定義するといくつかのルールを満たす世界があります。
- ベクトル空間といいます。

2.1.1　ポイント

- ベクトル空間
- 部分空間

2.1.2　行ベクトル・列ベクトル・スカラー

n 個の実数 a_i を横に並べた

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

を『行ベクトル』といい、縦に並べた

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

を『列ベクトル』という。

ベクトルは、太字の小文字 $\boldsymbol{a}$ であらわし、ベクトルと対比し、大きさのみをもつ量を『スカラー』といい、ギリシャ文字の小文字 α であらわす。

全ての成分が 0 であるベクトルを『ゼロ・ベクトル』といい、$\mathbf{0}$ であらわす。

2.1.3 ベクトルが等しいとは

$$a_i = b_i \qquad ; 1 = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

となっている場合に限り『等しい』といい、

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

とあらわす。

2.1.4 ベクトルの和

ベクトルの成分同士の和をベクトルの和と定義する。

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.1.5　ベクトルのスカラー倍

ベクトルの成分のスカラー倍をベクトルのスカラー倍と定義する。

$$\alpha\boldsymbol{a} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

2.1.6　ベクトルの差

上記の定義から

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

2.1.7 定理 IV$-\mathbf{2}-\mathbf{1}$

n 次元ベクトルの和、スカラー倍について次の関係式が成立する。

(i) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(iii) 任意の $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ となる $\mathbf{0}$ がただ 1 つある。

(iv) 各 $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ が一意的に定まる。

(v) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$

(vi) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$

(vii) $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$

(viii) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

2.2　ベクトル空間の公理系

ベクトル空間の定義

集合 V は少なくとも 1 つの要素を持つとし、V の要素を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ であらわす。集合 V が次の (I)(II) を満たすとき、V を『ベクトル空間』といい、V の各要素を『ベクトル』という。

(I)　任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して「和」と呼ぶ演算が定義される。その和を $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とかく。このとき、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ であって、この「和」は次の性質をもつ。

(i)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

(ii)　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

(iii)　任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ を満たす $\boldsymbol{0} \in V$ がただ一つある。この $\boldsymbol{0}$ を『ゼロ・ベクトル』という。

(iv)　各 $\boldsymbol{a} \in V$ に対して $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ が一意的に決まる。この $\boldsymbol{x}$ を $-\boldsymbol{a}$ とかく。

(II)　任意の $\boldsymbol{a} \in V$ と任意のスカラー α に対して『ベクトルのスカラー倍』と呼ばれる「積」$\alpha\boldsymbol{a}$ が定義される。このとき、$\alpha\boldsymbol{a} \in V$ であって、この「積」は次の性質を持つ。

(v)　$\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$

(vi)　$(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$

(vii)　$(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$

(viii)　$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

2.2.1　例　多項式の作るベクトル空間

実数係数の多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{9}$$

の全体を V とする。

$f(x),\ g(x)$ が、多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (9)$$

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n \tag{10}$$

ならば、和 $f(x) + g(x)$ も多項式であり、この和が公理 (i) から (iv) を満たすことは明らか。

また、$f(x)$ が多項式なら、任意のスカラー α に対して

$$\alpha f(x) = \alpha a_0 x^n + \alpha a_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha a_{n-1} x + \alpha a_n \tag{11}$$

も多項式式であり、このスカラー倍が公理の (v) から (viii) を満たすことは明らかである。

よって多項式の全体 V はベクトル空間である。このとき個々の多項式がベクトルである。

2.3　部分空間

定理 IV$\mathbf{2-1}$

V をベクトル空間とし、$U \subset V$ とする。このとき、U が V の部分空間であるための必要十分条件は、次の (I)(II) が成り立つことである。

(I)　$\boldsymbol{u_1},\ \boldsymbol{u_2} \in U$ ならば $\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \in U$

(II)　$\boldsymbol{u} \in U$ ならば $\alpha\boldsymbol{u} \in U$。ここで α は任意の実数。

証明

$\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{U}$ に対して和 $\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}$ は V の中で定義されている。だから、$\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \in U$ が成り立つことは U の中だけで和が定義されることを意味する。スカラー倍についても同様である。

このとき U の中でベクトル空間の公理系がすべて満たされることは、その公理系が V の中で満たされることから容易に確認できる。(終)

2.3.1　例　$(\boldsymbol{x_1+x_2+x_3=0})$ を満たす $\boldsymbol{x}$

命題

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ の中で

$$x_1+x_2+x_3=0 \tag{12}$$

を満たすものの全体を V とすれば V は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

証明

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)\in V$ とすれば、

$$x_1+x_2+x_3=0 \tag{13}$$

$$y_1+y_2+y_3=0 \tag{14}$$

である。

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=0 \tag{15}$$

が成り立つから

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V \tag{16}$$

である。

　また、α を任意の実数とすると、

$$\alpha(x_1+x_2+x_3)=\alpha 0 \tag{17}$$

$$\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3=0 \tag{18}$$

が成り立つから

$$\alpha\boldsymbol{x} \in V \tag{19}$$

である。

　よって定理 IV–2 – 1 により V は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。(終)

2.3.2　例　$(\boldsymbol{x_1+x_2+x_3=1})$ を満たす $\boldsymbol{x}$

命題

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ の中で

$$x_1+x_2+x_3=1 \tag{20}$$

を満たすものの全体を S とする。S は $\mathbb{R}^3$ の部分空間にはならない。

証明

$\alpha=0$ とすると、

$$0\boldsymbol{x}=0\times 1 \tag{21}$$

なので

$$0\boldsymbol{x}\notin S \tag{22}$$

である[1)]。よって S は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない[2)]。(終)

1)　否定の証明には反例を 1 つ示せば足りる。当然別の反例でもよい。

2)　$\mathbf{0}$ を含まないものはベクトル空間ではない。

参考文献

1.『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2.『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3.『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4.『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5.『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6.『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7.『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8. 『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9. 『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著 「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10. 『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11. 『完全独習 統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日 初版