第 IV 部　ベクトル

目次

第 IV 部　ベクトル ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
1　ベクトルとは・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
1.1　はじめに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
1.1.1　ポイント ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3

1.2 ベクトル · · · 4
1.2.1 記法 · · · 4
1.2.2 スカラー · · · 5
1.3 ベクトルの演算 · · · 6
1.3.1 2 つのベクトルが等しいということ · · · 7
1.3.2 ベクトルの和 · · · 8
1.3.3 ベクトルのスカラー倍 · · · 9
1.3.4 ゼロ・ベクトル · · · 10
1.4 定理 IV−**1 − 1** · · · 11
1.5 まとめ · · · 20

1　ベクトルとは

1.1　はじめに

- 方向と大きさをもつ量をベクトルといいます。
- 大きさだけの量をスカラーといいます。
- 等しいということを定義します。
- ベクトル同士の和とベクトルのスカラー倍を定義します。
- すると基本的な演算ルールが出来上がります。

1.1.1　ポイント

- 行ベクトルと列ベクトル
- スカラー
- ベクトル同士の和
- ベクトルのスカラー倍
- ゼロ・ベクトル

1.2 ベクトル

1.2.1 記法

n 個の実数 a_1, a_2, $\cdots$,a_n をこの順序で横に並べた

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

を n 次元『行ベクトル』といい、

縦に並べた

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

を n 次元『列ベクトル』という。

a_1, a_2, $\cdots$, a_n をそれぞれ第 1 成分，第 2 成分，$\cdots$ ，第 n 成分という。成分の数が n 個であるベクトルを『n 次元ベクトル』という。

ベクトルを 1 つの文字であらわすとき、太字の小文字,$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 等を使い、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

とあらわす。

1.2.2　スカラー

ベクトルに対比して、大きさのみを持つ量を『スカラー』という。スカラーという言葉は、線型代数では通常の実数という意味で使っている。

1.3　ベクトルの演算

ベクトル相互の間に演算を定義する。これらの定義は行ベクトルに対しても列ベクトルに対しても形式は同じである。

レイアウト上の理由から、行ベクトルまたは列ベクトルのみを示す。

1.3.1　2つのベクトルが等しいということ

　同じ次元の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

は対応する成分が全て等しいとき、即ち

$$a_i = b_i \qquad ; i = 1,\ 2,\ ,\cdots\ ,\ n \tag{7}$$

となっている場合に限り『等しい』といい、そのことを

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

であらわす。列ベクトルに関しても同様である。

1.3.2　ベクトルの和

同じ次元の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

の和を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

で定義する。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が列ベクトルであるときは、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

である。

1.3.3　ベクトルのスカラー倍

ベクトル $\boldsymbol{a}$ にスカラー α を掛けるということを、$\boldsymbol{a}$ の全ての成分に α を掛けることと定義し、ベクトル $\boldsymbol{a}$ にスカラー α 倍を

$$\alpha \boldsymbol{a} \tag{11}$$

とかく。

行ベクトルに対しては

$$\alpha \boldsymbol{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \cdots & \alpha a_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

列ベクトルであれば

$$\alpha \boldsymbol{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

である。

1.3.4　ゼロ・ベクトル

特殊なベクトルとして、全ての成分が 0 であるベクトルを『ゼロ・ベクトル』といい

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

であらわす。

列ベクトルの場合は、

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

である。

1.4 定理 IV−1 − 1

n 次元ベクトルの和、スカラー倍について次の関係式が成立する。

(i) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(iii) 任意の $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ となる $\mathbf{0}$ がただ 1 つある。

(iv) 各 $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ が一意的に定まる。

(v) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$

(vi) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$

(vii) $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$

(viii) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

証明 (i)

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ b_2+a_2 \\ \vdots \\ b_n+a_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{17}$$

行ベクトルも同様である。以下列ベクトルのみで示す。

証明 (ii)

$$
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_2+b_2+c_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n+c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ a_2+(b_2+c_2) \\ \vdots \\ a_n+(b_n+c_n) \end{pmatrix} \tag{18}
$$

$$
=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \\ \vdots \\ b_n+c_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{19}
$$

証明 (iii)

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\begin{pmatrix} a_1+0 \\ a_2+0 \\ \vdots \\ a_n+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{a} \tag{20}$$

が成り立つ。このような $\mathbf{0}$ は 1 つしかない。

証明 (iv)

$$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a} \tag{21}$$

$$= -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

とおけば、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) \tag{23}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \\ \vdots \\ a_n - a_n \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{25}$$

だから $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ はある。このような $\boldsymbol{x}$ は各 $\boldsymbol{a}$ に対して一意的に決まる。

証明 (v)

$$\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) \\ \alpha(a_2+b_2) \\ \vdots \\ \alpha(a_n+b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1+\alpha b_1) \\ \alpha a_2+\alpha b_2) \\ \vdots \\ \alpha a_n+\alpha b_n) \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_n \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b} \tag{27}$$

証明 (vi)

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \\ \vdots \\ (\alpha+\beta)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_1 \\ \alpha a_2 + \beta a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n + \beta a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \vdots \\ \beta a_n \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a} \tag{29}$$

証明 (vii)

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = (\alpha\beta)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \vdots \\ \beta a_n \end{pmatrix} = \alpha(\beta\boldsymbol{a}) \tag{30}$$

証明 (viii)

$$1\boldsymbol{a} = 1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \tag{31}$$

1.5 まとめ

- 向きと大きさを持つ量をベクトルという。
- 横に並んだ実数からなるベクトルを行ベクトルという。
- 縦に並んだ実数からなるベクトルを列ベクトルという。
- 大きさだけの量をスカラーという。
- ベクトル同士の演算は同じ次元のベクトル同士で定義している。
- 表記はスペースの関係から行ベクトルか列ベクトルのどちらかで書いているが、どちらも同じである。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著 「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版