第 III 部　行列式

目次

6 Laplace 展開

6.1 はじめに

- 余因数展開は 1 つの行あるいは 1 つの列に沿って展開した式です。
- 二つ以上の行あるいは 2 つ以上の列に沿った展開も可能です。
- Laplace 展開といいます。
- 余因数展開の一般化といいます。

6.1.1 ポイント

- Laplace 展開
- 0 だけのブロックをもつ行列式

6.2 Laplace 展開

行列式を

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n)\ a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1}$$

とする。この (1) を r 個 $;r \geqq 2$ の行に沿った展開を考える。

6.2.1 抜き出す小行列式

まず、r 個の行と r 個の列を選ぶ。選ばれた行の番号を

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_r \tag{2}$$

とし、列の番号を

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r \tag{3}$$

とする。

そしてこれらの行と列の交差する位置にある成分からなる r 次の小行列式を

$$D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \tag{4}$$

とかく。

$(p_1,\ p_2,\cdots,p_r)$ を $(j_1,j_2,\cdots,j_r)$ から作られる順列とする。

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_r} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{rj_1} & a_{rj_2} & \cdots & a_{rj_r} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= \sum_{(p_1,\ p_2,\cdots,p_r)} \varepsilon(p_1,\ p_2,\cdots,p_r) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{rp_r} \tag{6}$$

6.2.2 残りの成分からなる行列式

また、D から第 i_1, $i_2, \cdots$, i_r 行と第 i_1, j_1, $j_2, \cdots$ i_r 列を取り除いた残りの成分からなる $n-r$ 次の小行列式を

$$\overline{D}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{7}$$

とかく。

$(p_{r+1},\ p_{r+2},\cdots,p_n)$ を $(1,,2,\cdots,n)$ から $(j_1,j_2,\cdots,j_r)$ を除いて作られる順列とする。

$$\overline{D}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{r+1,p_{r+1}} & a_{r+1,p_{r+2}} & \cdots & a_{r+1,p_n}\\ a_{r+2,p_{r+1}} & a_{r+2,p_{r+2}} & \cdots & a_{r+2,p_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,p_{r+1}} & a_{n,p_{r+2}} & \cdots & a_{np_n}\end{vmatrix} \tag{8}$$

$$=\sum_{(p_{r+1},\ p_{r+2},\cdots,p_{r+r})}\varepsilon(p_{r+1},\ p_{r+2},\cdots,p_{r+r})a_{r+1,p_{r+1}}a_{r+2,p_{r+2}}\cdots a_{np_n} \tag{9}$$

この時 D とこれらの小行列式の間に次の関係式が成立する。

6.3 Laplace 展開

定理 III–6 – 1

行列式 (1) の r 個の行、第 $i_1,\ i_2, \cdots,\ i_r$ 行、を選び、これらの行は固定する。
このとき、これら r 個の行に沿った次の展開式が成立する。

$$D = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r} D \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \overline{D} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{10}$$

ここで、$j_1,\ j_2, \cdots,\ j_r$ は $1,\ 2, \cdots\ n$ から小さい順に選ばれた r 個の数であって、$\displaystyle\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r}$ は、可能な $j_1, j_2, \cdots, j_r$ の異なった ${}_nC_r$ 通りの選び方、全てについての和をあらわす。

同様に、r 個の列、第 $j_1,\ j_2,\cdots,\ j_r$ 列を選んで固定したとき、この r 個の列に沿った次の展開式が成立する。

$$D=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r}D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{11}$$

ここで、$\displaystyle\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}$ は $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r < n$ を満たす $i_1,\ i_2,\ \cdots, i_r$ の可能な全ての組についての和をあらわす。

6.4　証明

(10) が成り立つことを証明する。

はじめに、第 $1, 2, \cdots, r$ 行を固定した場合を考える。(1) の展開式

$$D = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n)\ a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{12}$$

において $p_1, p_2, \cdots, p_n$ はそれぞれ第 1 行, 第 2 行,$\cdots$, 第 n 行からえらばれた成分が所属する列の番号である。

行は $1, 2, \cdots, r$ に固定しておいて、これら r 個の行から選ばれる成分の所属する列の番号 $p_1,\ p_2, \cdots,\ p_r$ とその他の行から選ばれる成分の所属する列の番号 $p_{r+1},\ p_{r+2}, \cdots,\ p_n$ とを区

別して考える。

この区切りを明確にするために D の展開式 (1) を

$$D = \sum_{(p_1,\cdots,\ p_r,\ p_{r+1},\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,\cdots,\ p_r,\ p_{r+1},\cdots,p_n)\ a_{1p_1}\cdots a_{rp_r}a_{r+1,p_{r+1}}\cdots a_{np_n} \tag{13}$$

とあらわす。

ここで、r 個の列の番号 $j_1,\ j_2,\cdots,\ j_r$ をひとまず固定する。

そして (13) 右辺の展開式の $n!$ 個の項の中から、$(p_1,\cdots,\ p_r)$ の部分が $(j_1,\ j_2,\cdots,\ j_r)$ をいろいろに並べかえて得られる順列になっている項を全て取り出し、それらの和を

$$\Delta(j_1,\ j_2,\cdots,\ j_r) \tag{14}$$

とかいて、この $\Delta(j_1,\ j_2,\cdots,\ j_r)$ がどのような構造を持っているか調べる。

6.4.1　符号 $\boldsymbol{\varepsilon(p_1,\cdots,p_r,p_{r+1},\cdots,p_n)}$

順列 $(p_1,\cdots,p_r,p_{r+1},\cdots,p_n)$ に含まれている転倒の個数を N とする。
$(p_1,\cdots,p_r)$ の中だけで生ずる転倒の個数を N_1、
$(p_{r+1},\cdots,p_n)$ の中だけで生ずる転倒の個数を N_2、
$(p_1,\cdots,p_r)$ の中の p_i と $(p_{r+1},\cdots,p_n)$ の中の p_j との間で生ずる転倒の個数を N_3 とする。
このとき

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \tag{15}$$

である。

従って、符号 $\varepsilon(p_1,\cdots,p_r,p_{r+1},\cdots,p_n)$ は、

$$\varepsilon(p_1,\cdots,p_r,p_{r+1},\cdots,p_n) = (-1)^N \tag{16}$$
$$= (-1)^{N_1+N_2+N_3} \tag{17}$$
$$= (-1)^{N_1}(-1)^{N_2}(-1)^{N_3} \tag{18}$$

である。

ここで、

$$\varepsilon(p_1,\cdots,p_r) = (-1)^{N_1} \tag{19}$$
$$\varepsilon(p_{r+1},\cdots,p_n) = (-1)^{N_2} \tag{20}$$

である。

6.4.2 N_3 の詳細

- $(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r)$ は $(j_1,\ j_2, \cdots, j_r)$ を並べ替えて得られる順列である。
- $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ であることを注意して、$(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r)$ の中の最小数 j_1 を選ぶ。
- このとき、$(p_{r+1},\ p_{r+2}, \cdots, p_n)$ の中に含まれている j_1 より小さい数は 1 から $j_1 - 1$ までの $j_1 - 1$ 個である。
- j_1 と $(p_{r+1},\ p_{r+2}, \cdots, p_n)$ の中の 1 つとの間で生ずる転倒の個数は $j_1 - 1$ 個である。
- 次に、$(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r)$ の中の 2 番目に小さい数 j_2 を選ぶ。
- $(p_{r+1},\ p_{r+2}, \cdots, p_n)$ の中に含まれている j_2 より小さい数は、j_1を除いた1 から $j_2 - 1$ までの $j_2 - 2$ 個である。
- 従って、j_2 と $(p_{r+1},\ p_{r+2}, \cdots, p_n)$ の間で生ずる転倒の個数は $j_2 - 2$ 個である。
- 同様に、3 番目に小さい値 j_3 と $(p_{r+1},\ p_{r+2}, \cdots, p_n)$ との間で生ずる転倒の個数は、$j_3 - 1$

から j_1 と j_2 を除いた j_3-3 個である。

- 同様に、j_r と $(p_{r+1},\ p_{r+2},\cdots,p_n)$ との間で生ずる転倒の個数は j_r-r 個である。

こうして

$$N_3=(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_r-r) \tag{21}$$

$$=j_1+j_2+\cdots+j_r-1-2-\cdots-r \tag{22}$$

であることが分かる。よって

$$(-1)^{N_3}=(-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_r-1-2-\cdots-r} \tag{23}$$

であるが、この右辺は $(-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+j_2+\cdots+j_r}$ と同じなので

$$(-1)^{N_3} = (-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+j_2+\cdots+j_r} \tag{24}$$

と書くことができる。こうして

$$\varepsilon(p_1,\ \cdots,\ p_r,\ p_{r+1},\cdots,p_n) = (-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+j_2+\cdots+j_r}\varepsilon(p_1,\ \cdots,\ p_r)\varepsilon(p_{r+1},\cdots,p_n) \tag{25}$$

となることが分かった。

6.4.3 $\Delta(j_1, j_2, \cdots, j_r)$ の項の総数

- $(p_1,\ p_2, \cdots,\ p_r)$ は、$j_1,\ j_2, \cdots,\ j_1$ を並べ替えて得られる順列だから $r!$ 通りある。
- $(p_{r+1},\ p_{r+2}, \cdots,\ p_n)$ は、それ以外の $n-r$ 個の数の順列だから $(n-r)!$ 通りある。
- $\Delta(j_1, j_2, \cdots, j_r)$ は、$r!(n-r)!$ 個の項の和である。

$$\Delta(j_1, j_2, \cdots, j_r) = \sum_{\substack{(p_1, \cdots,\ p_r) \\ (p_{r+1}, \cdots, p_n)}} (-1)^N\ a_{1p_1} \cdots\ a_{rp_r}\ a_{r+1,p_{r+1}} \cdots\ a_{np_n} \tag{26}$$

$$= \sum_{\substack{(p_1, \cdots,\ p_r) \\ (p_{r+1}, \cdots, p_n)}} (-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+\cdots+j_r} \varepsilon(p_1, \cdots, p_r)\varepsilon(p_{r+1}, \cdots, p_n) \left(a_{1p_1} \cdots\ a_{rp_r}\right) \left(a_{r+1,p_{r+1}} \cdots\ a_{np_n}\right) \tag{27}$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+\cdots+j_r} \sum_{p_1,\ldots,p_r} \varepsilon(p_1,\cdots,p_r)a_{1p_1}\cdots\ a_{rp_r} \times \sum_{p_{r+1},\ldots,p_n} \varepsilon(p_{r+1},\cdots,p_n)\ a_{r+1,p_{r+1}}\cdots\ a_{np_n} \tag{28}$$

ここで、(5)(6)(8)(9) より

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{p_1,\ldots,p_r} \varepsilon(p_1,\cdots,p_r)a_{1p_1}\cdots\ a_{rp_r} \tag{29}$$

$$\overline{D}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{p_{r+1},\ldots,p_n} \varepsilon(p_{r+1},\cdots,p_n)\ a_{r+1,p_{r+1}}\cdots\ a_{np_n} \tag{30}$$

であった。

したがって、

$$\Delta(j_1,\ j_2,\ldots,\ j_r)=(-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+j_2+\cdots+j_r}D\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{pmatrix} \tag{31}$$

となる。

行列式 D は、$1,2,\cdots,n$ の中から r 個の $j_1,j_2,\cdots,j_r$ を選ぶすべての選び方 ${}_nC_r$ 通りについて $\Delta(j_1,j_2,\cdots,j_r)$ をもとめ、それらを加えたものである。

よって

$$D = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r} \Delta(j_1, j_2, \cdots, j_r) \tag{32}$$

$$= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r} (-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+j_2+\cdots+j_r} D\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{33}$$

である。(33) は D を第 $1, 2, \cdots, r$ 行に沿って展開した式である。

6.4.4 $(i_1,\ i_2, \cdots,\ i_r)$ に沿った展開式

第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ に沿った展開式を求める。ここで $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ である。

- D の第 i_1 行を 1 つずつ上の行と入れ替える操作を繰り返し、1 番上の行に持っていく。
- この時の入れ替えの回数は $i_1 - 1$ である。
- 次に i_2 を同様にして上から 2 番目の行に持っていく。
- この時の入れ替えの回数は、$i_2 - 2$ である。
- この操作を i_r が上から r 番目の行にくるまで繰り返す。
- i_r が r 番目に移動するときの入れ替えの回数は $n - r$ 回である。
- こうして得られた行列式を D^* とする。

D から D^* を作る際の行の入れ替えの総数は全部で

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_r - r) = i_1 + i_2 + \cdots + i_r - 1 - 2 - \cdots - r \tag{34}$$

回であるから

$$D^* = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r-1-2-\cdots-r} D \tag{35}$$

である。両辺に $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r-1-2-\cdots-r}$ をかけると、

$$D = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r-1-2-\cdots-r} D^* \tag{36}$$

を得る。

6.4.5　D^* の展開式

D^* を第 1, 2, $\cdots$, r 行に沿って展開すると、

$$D^* = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r} (-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+j_2+\cdots+j_r} D^* \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \overline{D^*} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{37}$$

である。小行列式の関係は

$$D^* \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\overline{D^*} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \overline{D} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{39}$$

これを (37) に代入し、さらに (36) に代入する。

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r-1-2-\cdots-r}\times(-1)^{1+2+\cdots+r+j_1+j_2+\cdots+j_r}=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r} \tag{40}$$

なので、

$$D=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r}D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{10}$$

が得られる。

行と列の役割を入れ替えて同様にすれば (11) が得られる。（終）

(10) を、D の第 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r$ 行に沿った『Laplace 展開』といい、(11) を、第 $j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_r$ 列に沿った『Laplace 展開』という。

6.5　例題

4 次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{41}$$

を第 2 行と第 3 行に沿って Laplace 展開しなさい。

解法

$$
\begin{aligned}
D = {} & (-1)^{2+3+1+2} D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3+1+3} D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
& + (-1)^{2+3+1+4} D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3+2+3} D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
& + (-1)^{2+3+2+4} D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3+3+4} D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \qquad (43)
\end{aligned}
$$

問題 III−**6 − 1**

4 次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

を、第 1 行と第 2 行に沿って Laplace 展開しなさい。

解例 III**−6 − 1**

$$
\begin{aligned}
D =&(-1)^{1+2+1+2}D\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}(-1)^{1+2+1+3}D\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\\
&(-1)^{1+2+1+4}D\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}(-1)^{1+2+2+3}D\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\\
&(-1)^{1+2+2+4}D\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}(-1)^{1+2+3+4}D\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\overline{D}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{23} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

問題 III−6 − 2

5 次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

を、第 1 列、第 2 列、第 3 列に沿って Laplace 展開しなさい。

解例 III$-\mathbf{6}-\mathbf{2}$

$$D=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{23} & a_{25} \end{vmatrix}$$

6.6 定理 III—6 − 1 系

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & & & \\
\vdots & \vdots & a_{2r} & & \text{\huge 0} & \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & & & \\
a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & \vdots & a_{2r} & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{nr+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{44}
$$

が成り立つ。

証明

左辺の行列式の右上隅にサイズが $r \times (n-r)$ の 0 だけからなる部分がある。このとき左辺を第 1, 2, $\cdots$,r 行に沿って Laplace 展開すると

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \overline{D}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \tag{45}$$

だけが残り、あとは全て 0 になってしまう。(終)

6.7　まとめ

- 複数行に沿った余因数展開を Laplace 展開という。
- Laplace 展開はかなり面倒な展開式になる。
- 行列式に 0 だけからなるブロックがある場合、効果的な方法である。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版