第 III 部　行列式

目次

5　同次 1 次方程式

5.1　はじめに

- 紹介する内容は理解できると思います。
- なんで、こんな話をしているかは分からないと思います。
- 天下り的な話の準備なんだと思ってください。
- 単独な話題としても重要ではあるんです。

5.1.1　ポイント

- 命題と対偶
- 同次連立 1 次方程式
- 同次連立 1 次方程式のときの Cramer の公式
- 消去法の原理

5.1.2　行列式の定義

n 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_1, \cdots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1}$$

で定義する。

5.1.3 行列式の基本性質

- 行列式の行と列を入れ替えた行列式の値は等しい（性質 1)。
- 行列式の 2 つの行を入れ替えると、行列式の符号が逆になる（性質 2)。
- 2 つの行が同じである行列式の値は 0 である (性質 2 系)。
- 行列式の 1 つの行が共通因数 α をもてば、行列式の外に括りだすことができる。(性質 3)。
- 行列式の 1 つの行の全ての成分が 0 であれば行列式の値は 0 である。(性質 3 系)
- 行列式の 1 つの行の各成分が 2 つの数の和に分解されていれば、この行列をそれぞれの数を成分とする 2 つの行列式の和に分解できる (性質 4)。
- 行列式の 1 つの行の各成分に定数 α をかけたものを他の行の対応する成分に加えても、行列式の値は変わらない (性質 5)。
- 行で成り立つことは列でも成り立つ。

問題 III−5 − 1

連立 1 次方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

5.1.4 Cramer の公式

n 次元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

の左辺の係数行列を D とする。$D \neq 0$ であれば、この方程式の解は (3) で与えられる。

$$x_j = \frac{b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}}{D} \qquad ; j = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

解例 III−5 − 1

Cramer の公式を利用する。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = 3, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = 2, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = -1$$

問題 III−5 − 2

連立 1 次方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解例 III—**5 − 2**

Cramer の公式を利用する。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = 0, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = 0, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = 0$$

5.1.5　命題

- 正しいか正しくないかを判断できる文章を『命題』という。
- P を条件、Q を結論として

$$P \quad \Longrightarrow \quad Q \tag{4}$$

  とあらわす。
- 命題が正しい場合、その命題は『真』であるといい、正しくない場合は『偽』であるという。

5.1.6　命題の否定

- 文章の内容を打ち消すことを『否定』という。
- P の否定を P^C であらわし、Q の否定を Q^C であらわす。
- 「命題」と「命題の否定」のうちどちらかは真でありどちらかは偽である。
- 命題が真の場合、正しいことを示さなくてはならない。
- 命題が偽であることを示す場合、反例を一つ示せばよい。

5.1.7　命題と対偶

　命題を

$$P \quad \Longrightarrow \quad Q \tag{4}$$

とすると

$$Q^C \quad \Longrightarrow \quad P^C \tag{5}$$

を『対偶』という。

　命題と対偶の真偽は一致する。命題が正しいことを示す場合、対偶が真であることを示せば足りる。

5.2　同次連立 1 次方程式

定数項全て 0 である連立方程式

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = 0
\end{cases}
\tag{6}
$$

を『同次連立 1 次方程式』という。

(6) 左辺の係数の行列式 D が 0 でなければ、Cramer の公式により (6) の解は全て 0 になる。

消去法の原理

同次連立一次方程式の係数の行列式を D とすると、

$$D \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall x_i = 0 \quad ; i = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

である。この命題の対偶をとると、

$$\exists x_i \neq 0 \quad ; i = 1, 2, \cdots, n \qquad \Longrightarrow \qquad D = 0 \tag{8}$$

この主張を『**消去法の原理**』という。

問題 III−**5 − 3**

同次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

の係数の行列式を D とする。

$$\exists x_i \neq 0 \quad ; i = 1, 2, \cdots, n \qquad \Longrightarrow \qquad D = 0$$

を日本語で表現しなさい。

解例 III−5 − 3

同次連立 1 次方程式において、ある x_i が

$$x_i \neq 0$$

の解を持てば、係数の行列式 D の値は 0 である。

例題 1

　座標平面上の異なる 2 点を通る直線の方程式を、行列式を使ってあらわすことを考える。

　座標平面上の与えられた 2 点の座標を $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ とする。この 2 点を通る直線の方程式を

$$ax + by + c = 0 \tag{9}$$

とする。この直線上に 1 点 $(x_3,\ y_3)$ をとる。

　3 点、$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ は全てこの直線上だから

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases} \tag{10}$$

が成り立っている。

このことは X, Y, Z に関する同次方程式

$$\begin{cases} x_1X + y_1Y + Z = 0 \\ x_2X + y_2Y + Z = 0 \\ x_3X + y_3Y + Z = 0 \end{cases} \tag{11}$$

が、$X = a,\ Y = b,\ Z = c$ という解を持つことを意味する。

ところが $a,\ b,\ c$ は直線の方程式の係数だから少なくとも 1 つ、0 でないものがある。

従って、同次方程式 (11) は、$X = Y = Z = 0$ の解とは異なる解を持つことになるから、消去法の原理により (11) の左辺の係数の行列式は 0 でなくてはならない。よって

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

が成立する。

(x_3, y_3) は (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る任意の点でよいから、添え字を外して $(x,\ y)$) とかけば、この直線上の任意の点 $(x,\ y)$ は

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

である。これは 2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式である。

例えば、$(x_1,\ x_2)$ 平面上の 2 点 (3, 4),(5, 6) を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

である。

問題 III−5 − 4

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

の値を求めなさい。

解例 III−5 − 4

$$\begin{aligned} D &= (3 \times 6 \times 1) + (4 \times 1 \times x) + (1 \times 5 \times y) - (3 \times 1 \times y) - (4 \times 5 \times 1) - (1 \times 6 \times x) \\ &= 18 + 4x + 5y - 3y - 20 - 6x \\ &= -2x + 2y - 2 \end{aligned}$$

ここで、$D = 0$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= -2x + 2y - 2 \\ 2y &= 2x + 2 \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

問題 III−**5 − 5**

(3, 4), (5, 6) を通る直線を求めなさい。

解例 III–**5 – 5**

求める直線を

$$y = ax + b$$

とする。

(3, 4), (5, 6) を通るのだから

$$\begin{cases} 4 = 3a + b \\ 6 = 5a + b \end{cases}$$

を求めればよい。

$$\begin{array}{rcrcr} 6 & = & 5a & + & b \\ -)\ 4 & = & 3a & + & b \\ \hline 2 & = & 2a & & \end{array}$$

なので求める直線は

$$y = x + 1$$

5.3 まとめ

- 定数項が全て 0 である連立 1 次方程式を同次連立 1 次方程式という。
- 同次連立 1 次方程式における Cramer の公式の対偶を『消去法の原理』という。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著 「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷
8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版