第 III 部　行列式

目次

3 連立 1 次方程式の解

3.1 はじめに

- n 元連立 1 次方程式を解くときは少しずつ変数を減らしながら解を得ることができます。
- 行列式の知識を使うと一気に解を得ることができます。
- 表計算ソフトで連立 1 次方程式の解を得ることも可能です。

3.1.1 ポイント

- n 次元連立 1 次方程式の解
- Cramer の公式

3.1.2 行列式の定義

定義

行列式 D の値を

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_1, \cdots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

と定義する。

3.1.3　サラスの方法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2}$$

問題 III−**3 − 1**

次の行列式を計算しなさい。

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

解例 III**−3 − 1**

サラスの方法を使う。

(1)
$$\begin{aligned}&(2)(5)(-2)+(-3)(-1)(3)+(4)(-1)(4)-(4)(5)(3)-(-3)(-1)(-2)-(2)(-1)(4)\\&=-20+9-16-60+6+8=-73\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(13)(5)(-2)+(-3)(-1)(4)+(4)(0)(4)-(4)(5)(4)-(-3)(0)(-2)-(13)(-1)(4)\\&=-130+12+0-100+0+52=-146\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(2)(0)(-2)+(13)(-1)(3)+(4)(-1)(4)-(13)(-1)(-2)-(4)(0)(3)-(2)(-1)(4)\\&=0-39-16-26-0+8=-73\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(2)(5)(4)+(-3)(0)(3)+(13)(-1)(4)-(13)(5)(3)-(-3)(-1)(4)-(2)(0)(4)\\&=40+0-52-195-12-0=-219\end{aligned}$$

問題 III−3 − 2

次の行列式を計算しなさい。

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

解例 III−3 − 2

(1) 22

(2) 66

(3) -22

(4) 44

問題 III**−3 − 3**

次の行列式を計算しなさい。

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 11 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

解例 III$-\mathbf{3-2}$

(1)　-32

(2)　-96

(3)　-64

(4)　32

3.1.4 行列式の基本性質

- 行列式の行と列を入れ替えた行列式の値は等しい（性質 1)。
- 行列式の 2 つの行を入れ替えると、行列式の符号が逆になる（性質 2)。
- 2 つの行が同じである行列式の値は 0 である (性質 2 系)。
- 行列式の 1 つの行が共通因数 α をもてば、この α を行列式の外に括りだすことができる。(性質 3)。
- 行列式の 1 つの行の全ての成分が 0 であれば行列式の値は 0 である。(性質 3 系)
- 行列式の 1 つの行の各成分が 2 つの数の和に分解されていれば、この行列をそれぞれの数を成分とする 2 つの行列式の和に分解できる (性質 4)。
- 行列式の 1 つの行の各成分に定数 α をかけたものを他の行の対応する成分に加えても、行列式の値は変わらない (性質 5)。

- 行で成り立つことは列でも成り立つ。

3.2　連立方程式の解

未知数も方程式も共に n 個である n 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

を考える。

　連立 1 次方程式 (3) の左辺の係数の行列式を 0 ではないと仮定する。すなわち

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

と仮定する。

　$x_j\ ;j = 1, 2, \cdots, n$ の値を求めるために、連立 1 次方程式 (3) の x_j の係数である $a_{1j},\ a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ の余因数 $A_{1j},\ A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ をとる。

1 番目の式に A_{1j} をかけ、2 番目の式に A_{2j} をかける。そして、最後の式に A_{nj} を掛けると

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j}x_1 + a_{12}A_{1j}x_2 + \cdots + a_{1j}A_{1j}x_j \ + \cdots + a_{1n}A_{1j}x_n = b_1A_{1j} \\ a_{21}A_{2j}x_1 + a_{22}A_{2j}x_2 + \cdots + a_{2j}A_{2j}x_j \ + \cdots + a_{2n}A_{2j}x_n = b_2A_{2j} \\ \vdots \\ a_{n1}A_{nj}x_1 + a_{n2}A_{nj}x_2 + \cdots + a_{nj}A_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}A_{nj}x_n = b_nA_{nj} \end{cases} \tag{5}$$

これらの式をすべて加え、各未知数の係数を調べる。

x_j の係数は

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \tag{6}$$

となるが、これは行列式 D の第 j 列に沿った余因数展開になっているから、定理 III–3 – 2 によりその和は D である。

x_j 以外の未知数 $x_l \quad ; j \neq l$ の係数は

$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} \qquad ; j \neq l \tag{7}$$

となるが、定理 III–3 – 2 によりその和は 0 である。

従って、(5) を辺々加えれば、左辺では、未知数 x_j の係数は行列式 D になり、x_j 以外の未知数の係数は 0 になってしまうから、x_j 以外の係数が一挙に消去されてしまうのである。こうして

$$D\ x_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \tag{8}$$

が得られる。仮定により $D \neq 0$ なので両辺を D で割ると

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}}{D} \qquad ; j = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

を得る。

(9) は次のように書くこともできる。

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \qquad ; j = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

定理

n 次元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

の左辺の係数行列を D とする。$D \neq 0$ であれば、この方程式の解は (9) で与えられる。

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}}{D} \qquad ; j = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

3.3　Cramer の公式

(9) あるいは (10) を『Cramer の公式』という。連立 1 次方程式の解が係数の作る行列式を用いてあらわされたものである。Cramer の公式は**解の構造を示す式**として重要である。

問題 III–3 − 1

連立 1 次方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解例

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}} = 2, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}} = 1, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}} = 3$$

問題 III–3 – 4

連立 1 次方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

解例 III—3 − 4

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}} = 3, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}} = -1, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}} = 2$$

問題 III—3 − 5

連立 1 次方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

解例 III—3 − 5

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = 3, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = 2, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = -1$$

3.4 まとめ

- 連立 1 次方程式の係数の行列式を D とする。
- $D \neq 0$ であれば、方程式は解を持つ。
- Cramer の公式によって、方程式の解は

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}}{D}, \quad ; j = 1, 2, \cdots, n$$

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著　「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970年9月10日 第1刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975年6月10日初版

9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987年4月20日初版

10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979年4月20日初版

11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006年9月28日　初版