第 III 部　行列式

目次

3　余因数展開

3.1　はじめに

- 次数が低ければ定義に従い行列式の値を得ることは可能です。
- 3 次を超える行列式の値を定義に従って求めることは現実的でありません。
- 工夫して行列式の次数を下げていきます。

3.1.1　ポイント

- 余因数
- 小行列式
- 余因数展開

3.1.2　行列式の定義

n 次の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1}$$

で定義される。

3.1.3 行列式の基本性質

- 行列式の行と列を入れ替えた行列式の値は等しい（性質 1）。
- 行列式の 2 つの行を入れ替えると、行列式の符号が逆になる（性質 2）。
- 2 つの行が同じである行列式の値は 0 である (性質 2 系)。
- 行列式の 1 つの行が共通因数 α をもてば、行列式の外に括りだすことができる。(性質 3)。
- 行列式の 1 つの行の全ての成分が 0 であれば行列式の値は 0 である。(性質 3 系)
- 行列式の 1 つの行の各成分が 2 つの数の和に分解されていれば、この行列をそれぞれの数を成分とする 2 つの行列式の和に分解できる (性質 4)。
- 行列式の 1 つの行の各成分に定数 α をかけたものを他の行の対応する成分に加えても、行列式の値は変わらない (性質 5)。
- 行で成り立つことは列でも成り立つ。

問題 III–**3 − 1**

行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

問題 III–**3 − 2**

行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

解例 III−3 − 1

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

解例 III−3 − 2

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32}$$

3.2　記法

行列式のことを英語で Determinant という。この節では、この最初の文字 D を使って行列をあらわす。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

3.2.1　行列と対比したときの記法

行列と理論との関連で行列式を扱うときは、正方行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

とかいたとき、

これと同じ成分をもつ行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

とあらわすことが普通である。また $detA$ という記号も $|A|$ と同じ意味で使われることがある。$|A|$ あるいは $detA$ は行列の理論のところでは使うが、この節では行列式をあらわす記号に D を採用する。

3.3　余因数

3 次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{6}$$

D を使って説明する。行列式の任意の成分に着目する。ここでは a_{23} とする。展開式 (6) の項の中で a_{23} を因数として持つ項を全て探し出す。

　これらをすべて抜き出すと、

$$a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{7}$$

共通因数 a_{23} を括りだすと

$$a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \tag{8}$$

この時の括弧の中

$$(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \tag{9}$$

を a_{23} の『余因数』といい、A_{23} という記号であらわす。即ち

$$A_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \tag{10}$$

同様に a_{11} の余因数 A_{11} は

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \tag{11}$$

である。

n 次行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n)\ a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{12}$$

において成分 a_{ij} を因数として持つ項の全てからなる部分和を取り出し、それらの共通因数 a_{ij} を括弧の外に括りだして

$$a_{ij}(\cdots) \tag{13}$$

の形にする。この時の括弧の中の $(\cdots)$ の部分を a_{ij} の『余因数』といい、記号 A_{ij} であらわす。

この定義から (12) の展開式で a_{ij} を因数として持つ項の和は

$$a_{ij}A_{ij} \tag{14}$$

と書くことができる。A_{ij} は $(n-1)!$ 個の項の和になっている。

3.3.1 余因数展開

ここでも (5)(6) を使って説明する。

(5) の 1 つの行、例えば 1 行目 $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$ に着目する 。

展開式 (6) を第 1 行の成分 $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$ についてまとめ直す。

$$
\begin{aligned}
(6) &= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{32}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}) && (15)\\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{32}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) && (16)\\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} && (17)
\end{aligned}
$$

よって

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{18}$$

である。この展開式を行列式 D の第 1 行に沿った『余因数展開』という。全く同様にして第 2 行, 第 3 行に沿って余因数展開すると

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \tag{19}$$

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \tag{20}$$

であり、同様に第 1 列, 第 2 列, 第 3 列に沿って余因数展開することもできる。

一般の場合の用因数展開も同様に定義される。

n 次行列式 (12) の第 i 行、$a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}$ に着目する。

(12) 右辺の展開式の中で、成分 a_{i1} を因数として持つ項の和は

$$a_{i1 A_{i1}} \tag{21}$$

と書くことができる。同様に a_{ij} を因数として持つ項の和は

$$a_{ij A_{ij}} \tag{22}$$

そして、a_{in} を因数として持つ項の和は

$$a_{in A_{in}} \tag{23}$$

である。これら $a_{i1}A_{i1} \cdots a_{ij}A_{ij} \cdots a_{in}A_{in}$ に含まれる項は全て異なっており、しかもこれらの和が (12) 右辺である。

従って展開式は

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots, a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in} \tag{24}$$

となる。

この展開式を、行列式 D の『第 i 行に沿った余因数展開』という。

3.3.2　小行列式

定義

n 次行列式 D から、その第 i 行と第 j 列の全ての成分を取り除いて得られる $n-1$ 次の行列式を D_{ij} とあらわし、この行列式を『$n-1$ 次の小行列式』という。

例えば

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{25}$$

のときは

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{26}$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{27}$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{28}$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{29}$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{30}$$

である。

補題 III−3 − 1

第 1 行目第 1 列の成分が 1、それ以外の成分が 0 である n 次行列式において、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{31}$$

が成り立つ。

証明

(31) 左辺の第 1 行は、最初の成分以外は全て 0 である。従って (31) の展開式は、第 1 行から最初の成分 1 を選んだ場合の項の和だけになるから

$$(31)\ 左辺 = \sum_{(p_2,p_3,,p_n)} \varepsilon(1, p_2, p_3, , p_n) 1 \cdot a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n} \tag{32}$$

である。

このとき、順列

$$(1,\ p_2,\ p_3, \cdots,\ p_n) \tag{33}$$

と順列

$$(p_2,\ p_3, \cdots,\ p_n) \tag{34}$$

の転倒の数は同じなので、行列式の符号は等しく

$$\varepsilon(1,\ p_2,\ p_3, \cdots,\ p_n) = \varepsilon(p_2,\ p_3, \cdots,\ p_n) \tag{35}$$

である。従って、

$$(31)\ \text{左辺} = \sum_{(p_2, p_3,, p_n)} \varepsilon(p_2, p_3, \cdots, p_n) a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n} \tag{36}$$

である。

つぎに (31) 右辺の展開式を調べる。

(31) 右辺の行列式の成分 a_{ij} の添え字は i も j 共に 2 から始まっているから添え字 (ij) を持つ成分 a_{ij} は、右辺の行列式の上から数えて $i-1$ 番目の行、左から数えて $j-1$ 番目の列に含まれている。

従って、各行から 1 つずつ、同時に各列からも 1 つずつであるように選んだ成分が a_{2p_2}, $a_{3p_3}, \cdots$, a_{np_n} であったとすれば、それらの成分の含まれる列はそれぞれ左から数えて、p_2-1 番目,p_3-1 番目,$\cdots$,p_n-1 番目の列である。

だからこれらの成分の積 $a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$ につく符号は

$$\varepsilon(p_2-1,\ p_3-1,\ \cdots\ ,p_n-1) \tag{37}$$

である。

すると (31) 右辺は

$$(31)\ 右辺 = \sum_{(p_2-1, p_3-1, \cdots, p_n-1)} \varepsilon(p_2-1, p_3-1, \cdots, p_n-1) a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n} \tag{38}$$

である。ここで

$$(p_2,\ p_2, \cdots,\ p_n) \tag{39}$$

は 2 から n までの異なる自然数の順列である。ところで、2 つの数の間の転倒の有無は、それらの数の大小関係だけで決まるから (39) と

$$(p_2-1,\ p_2-1, \cdots,\ p_n-1) \tag{40}$$

の含む転倒の個数は等しい。

$$
\begin{aligned}
(31)\text{ 右辺} &= \sum_{(p_2-1,p_3-1,\cdots,p_n-1)} \varepsilon(p_2-1, p_3-1, \cdots, p_n-1) a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n} && (38) \\
&= \sum_{(p_2,p_3,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_2, p_3, \cdots, p_n) a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n} && (41) \\
&= (31)\text{ 左辺} && (42)
\end{aligned}
$$

(終)

補題 III−3 − 2

第 i 行目第 j 番目の成分が 1、それ以外の成分が 0 である n 次行列式において、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{ij} & a_{1,j} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \tag{43}$$

が成り立つ。

証明

(43) 左辺の第 i 行は、j 番目の成分 1 以外は 0 である。まずこの第 i 番目の行を、1 つ上の第 $i-1$ 行と入れ替える。次いでその 1 つ上の第 $i-2$ 行と入れ替え、次々にひとつ上の行と入れ替える操作を繰り返して、第 i 行を一番上に持っていく。

この操作によって、第 i 番目の行以外の行の上下関係は変わらない。このようにして第 i 行を一番上に持っていくまでに行の入れ替えは $i-1$ 回なされているから、行列式の符号は $i-1$ 回入れ替わる。

よって

$$
(43)\,\text{左辺} = (-1)^{i-1}
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{ij} & a_{1,j} & \cdots & a_{1n}
\end{vmatrix} \tag{44}
$$

となる。次に (44) の第 j 列を次々に左隣の列と入れ替える操作を繰り返し、この列が一番左に来るようにする。

このときの列の入れ替えは $j-1$ 回行われるから行列式の符号は $j-1$ 回入れ替わる。よって (44) は

$$(44) = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \tag{45}$$

である。

(45)・行列式部分において、補題 III–3 − 1 より、

$$
(45) = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & \\
a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & \cdots & a_{1n} &
\end{vmatrix} \tag{46}
$$

そして、(46)・符号部分において

$(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{1+j-2} = (-1)^{i+j}$

なので (43) が成り立つ。(終)

定理 III–3 – 1

行列式 D の余因数 A_{ij} と小行列式 D_{ij} の間には関係式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \tag{47}$$

が成立する。

証明

行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{48}$$

の第 i 行の各成分が、その成分と 0 との和として

$$a_{i1} = a_{i1} + \cdots + 0 + \cdots + 0 \tag{49}$$

$$\vdots$$

$$a_{ij} = 0 + \cdots + a_{i1j} + \cdots + 0 \tag{50}$$

$$\vdots$$

$$a_{in} = 0 + \cdots + 0 + \cdots + a_{in} \tag{51}$$

であると考えると、行列の性質 4 により行列式を分解することができる。

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{52}
$$

(52) 第 j 番目の行列式は、行列の性質 3 により

$$a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{53}$$

なので、(53) 行列式部分は

$$
A_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \tag{54}
$$

である。

そして補題 III–3 – 2 により

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{55}$$

である。(55) 行列式部分は (54) からその第 i 行と第 j 列の全ての成分を取り除いて得られた $n-1$ 次の行列式なので、これを定義に従い D_{ij} であらわすと (47) を得る。(終)

定理 III–3 – 1 により

$$A_{i1} = (-1)^{i+1} D_{i1} \tag{56}$$

$$A_{i2} = (-1)^{i+2} D_{i2} \tag{57}$$

$$\vdots$$

$$A_{in} = (-1)^{i+n} D_{in} \tag{58}$$

である。D_{i1}, $D_{i2}, \cdots$, D_{in}, は D の第 i 行を取り除いて作られている。したがって、これらの小行列式は D の第 i 成分とは無関係に決まるから、余因数 A_{i1}, $A_{i2}, \cdots$, A_{in} もまた D の第 i 行とは無関係である。

そこで、D の第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots, a_{in}$ を別の成分 b_1, b_2, $\cdots, b_n$ に置き換えた行列式 $\tilde{D}$ を作ったとき、$\tilde{D}$ の第 i 行の余因数は A_{i1}, $A_{i2}, \cdots$, A_{in} である。

よって、$\tilde{D}$ の第 i 行に沿った余因数展開は、D の第 i 行の成分の余因数 A_{i1}, A_{i2}, $\cdots, A_{in}$ を使って、

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \cdots + b_n A_{in} \tag{59}$$

と書くことができる。

さて (59) において、第 i 行の $b_1,\ b_2,\ \cdots\ ,\ b_n,$ を D の第 k 行 $(i \neq k)$ の成分 $a_{k1},\ a_{k2}, \cdots\ ,\ a_{kn}$ にすれば、(59) の左辺の行列式は第 i 行と第 k 行が同じになるから、行列式の性質 2 によりその値は 0 である。これを定理にまとめる。

定理 III–3 – 2

n 次行列式 D の成分 a_{ij} の余因数を A_{ij} とすれば、次の関係が成り立つ。

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = D \tag{60}$$

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = 0 \quad ; i \neq k \tag{61}$$

列に関しても同様である。

例題

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdot & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{62}$$

の行列式の値を求めよ。

解法

(62) を第 1 行に沿って余因数展開すると、

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdot & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{63}$$

(63) を第 1 行に沿って余因数展開すると、

$$a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{44} & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdot & 0 \\ a_{n4} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{64}$$

以下同様にして、行列式の部分を次々第 1 行に沿って余因数展開すれば最終的に

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \tag{65}$$

となる。

三角行列式

行列式の左上隅の a_{11} から右下の a_{nn} に至る対角線上にならんだ成分 a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \cdots, a_{nn}$ を『対角成分』といい、これらの成分の並んでいる斜めの線を『対角線』という。対角線の右上の部分または左下の部分がすべて 0 である行列式を『三角行列式』という。三角行列式をあらわすとき、0 の部分に大きな 0 を書いてあらわすことがある。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \huge 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{66}$$

三角行列式の値は対角成分の積になる。

例題

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{67}$$

の値を求めなさい。

解法

第 4 行を 3 倍して第 1 行から引く。

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 & -8 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{68}$$

第 4 行を第 2 行に加える。

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{69}$$

第 4 行を 2 倍して第 3 行から引く。

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{70}$$

第 1 列に沿って余因数展開する

$$(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -4 & -5 & -8 \\ 6 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & -5 & -8 \\ 6 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \tag{71}$$

第 1 行, 第 3 行の共通因数 -1 を外に出し、第 2 列の共通因数 5 を外に出すと

$$-5\begin{vmatrix}4 & 1 & 8\\ 6 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{vmatrix} \tag{72}$$

第 1 行を第 2 行から引くと

$$-5\begin{vmatrix}4 & 1 & 8\\ 2 & 0 & -7\\ 3 & 0 & 5\end{vmatrix} \tag{73}$$

第 2 列に沿って余因数展開すると

$$(-5)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -7\\ 3 & 5\end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix}2 & -7\\ 3 & 5\end{vmatrix} \tag{74}$$

$$= 5(2 \times 5 - (-7) \times 3) \tag{75}$$

$$= 5(10 + 21) = 5 \times 31 = 155 \tag{76}$$

問題 III**−3 − 3**

行列式の値を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

問題 III**−3 − 4**

行列式の値を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

問題 III−3 − 5

行列式の値を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

問題 III−3 − 6

行列式の値を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$$

3.3.3　Vandermond（ヴァンデルモンド）の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} \tag{77}$$

を因数分解することを考える。

(78) の第 k 行と第 $k+1$ 行に注目する。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_1}^{k-1} & {x_2}^{k-1} & \cdots & {x_n}^{k-1} \\ {x_1}^{k} & {x_2}^{k} & \cdots & {x_n}^{k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} \tag{78}$$

第 k 行に x_1 をかけた

$$({x_1}^k,\ x_1{x_2}^{k-1}, \cdots,\ x_1{x_n}^{k-1}) \tag{79}$$

を第 $k+1$ 行から引く。

すると、

$$
\begin{vmatrix}
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
{x_1}^{k-1} & {x_2}^{k-1} & \cdots & {x_n}^{k-1} \\
0 & (x_2 - x_1){x_2}^{k-1} & \cdots & (x_n - x_1){x_n}^{k-1} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{vmatrix}
\tag{80}
$$

となる。この手続を、下の行から順に上の方へと繰り返す。

1. 第 $n-1$ 行に x_1 をかけて、第 n 行から引く
2. 第 $n-2$ 行に x_1 をかけて、第 $n-1$ 行から引く
3. 同様に続け、最後に第 1 行に x_1 をかけて、第 2 行から引く

そうすると、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1){x_2}^{n-2} & (x_3 - x_1){x_3}^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1){x_n}^{n-2} \end{vmatrix} \tag{81}$$

この行列式を第 1 列に沿って余因数展開する。

すると

$$
\begin{vmatrix}
x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\
(x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
(x_2 - x_1){x_2}^{n-2} & (x_3 - x_1){x_3}^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1){x_n}^{n-2}
\end{vmatrix}
\tag{82}
$$

となる。ここで、第 1 列から $(x_2 - x_1)$、第 2 列から $(x_3 - x_1)$、$\cdots$ 第 n 列から $(x_n - x_1)$ を共通因数として掃き出す。

すると

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ \cdots\ (x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_2}^{n-2} & {x_3}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix} \tag{83}$$

をえる。(83) 行列式部分は (78) と同じ形をしていて、サイズが 1 つ小さくなっている。形が同じなので上記の論法がそのまま使えて各行に x_2 を掛けたものをその下の行から引く、という計算を下の行から上に向かって順次行えば同じような結果が得られ 、

(83) 行列式部分は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_2}^{n-2} & {x_3}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix} \tag{84}$$

$$= (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ \cdots\ (x_n - x_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_3}^{n-3} & {x_4}^{n-3} & \cdots & {x_n}^{n-3} \end{vmatrix} \tag{85}$$

(85) 行列式部分は (78) と同じ形をしていてさらにサイズが 1 つ小さくなっている。あとは同様の計算手続きを次々に進めると

$$\left.\begin{array}{r}(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_1)\\ \times(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\cdots(x_n-x_2)\\ \times(x_4-x_3)(x_5-x_3)\cdots(x_n-x_3)\\ \vdots\\ \times(x_n-x_{n-1})\end{array}\right\}=\prod_{j>i}(x_j-x_i) \tag{86}$$

という積になる。ここで $\prod_{j>i}(x_j-x_i)$ は $x_j-x_i \quad ; j>i$ の全ての式の積をあらわす。

こうして、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i}(x_j - x_i) \tag{87}$$

が求める結果である。

この行列式を『Vandermond の行列式』という。

3.4　まとめ

- 行列式の展開式の中のある因数 a_{ij} を持つ全ての項をまとめ、括弧に括ってその共通因数 a_{ij} を掃き出したとき、残った括弧の中を『余因数』といい、A_{ij} とあらわす
- n 次行列式から第 i 行と第 j 列の全ての成分を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の行列式を D_{ij} であらわし『$n-1$ の小行列式』という
- 余因数と小行列式には $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ の関係がある。
- 行列式において、k 行（列）目の各成分を a 倍し i 行（列）目の対応する成分に加えても行列式の値は変わらない。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著 「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著　「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版