第 III 部　行列式

目次

2　行列式の基本性質

2.1　はじめに

- 行列式は面白い性質を持っています。
- それらは定義から導かれます。
- 定義を正しく知ることが重要です。
- 重要なことはここで紹介する性質は面白いのです。

2.1.1　ポイント

- 5 つの性質
- 5 つの性質の使い方

2.2　性質 1

性質 1

行列式の第 1 行, 第 2 行,$\cdots$, 第 n 行を、それぞれ第 1 列, 第 2 列,$\cdots$, 第 n 列に並べ替えて作られる行列式は、もとの行列式と同じものである。

即ち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

が成立する。

証明

(1) 左辺の展開式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{2}$$

である。

(1) 右辺の行列式の展開式を、ルールに従って求めることを考える。

- 右辺の行列式の第 1 行, 第 2 行,$\cdots$, 第 n 行から、それぞれ 1 つずつ成分を選ぶ。
- それらを $a_{1q_1}, a_{2q_2}, \cdots, a_{nq_n}$ とする。
- 列から見ても、それぞれ第 1 列, 第 2 列,$\cdots$, 第 n 列から選ばれているのだから、各成分が属している列の番号 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ は全て異なっている。
- $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ は 1 から n までの自然数の順列になっている。
- このように選ばれた成分の積 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ に、列の番号の p_j の符号 $\varepsilon(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ を掛けて加える。

こうして (1) 右辺の展開式を得る。

(1) 右辺の展開式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(q_1,q_2,\cdots,q_n)} \varepsilon(q_1, q_2, \cdots, q_n) a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} \tag{3}$$

である。

(2) 右辺と (3) 右辺が等しいことを示すために、

1. (2) 右辺と (3) 右辺それぞれに現れる全ての積が等しいことを示す。
2. (2) 右辺と (3) 右辺の対応する積の符号が全て等しいことを示す。

(2) 右辺にある積と (3) 右辺にある積が全て等しいことを示す。

- (2) 右辺に現れている積の 1 つ

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{4}$$

  を任意に選ぶ。
- 掛け算の順序を二番目の添え字が $(p_1, p_2, \cdots, p_n,)$ が $(1, 2, \cdots, n)$ になるように並び替える。
- この並び替えによって最初の添え字順列は $(1, 2, \cdots, n)$ からかわる。変わった後の順列を $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とする。

$$a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n} \tag{5}$$

- このとき、掛け算の順序は変わっても積そのものは変わらないから

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n} \tag{6}$$

  である。
- (6) 右辺の積は (3) の右辺の中に現れている。
- 次に (3) 右辺の積の任意の 1 つ $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ をとる。
- 積の順序を最初の添え字が $(1, 2, \cdots, n)$ になるように並び変えれば $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ にすることができる。
- これは (2) の右辺の中に現れている。
- (2) の積 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ の全体と (3) の積 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ の全体は積の集合としては同じものである。

対応する積の符号が等しいことを示す。

- (6) 左辺の
$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{4}$$
には (2) では符号
$$\varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{7}$$
が付いている。
- (6) 右辺の
$$a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n} \tag{5}$$
には (3) では符号
$$\varepsilon(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{8}$$
が付いている。
- (4) を入れ替えて (5) が得られたのだから、添え字の順列は**「二番目の添え字の順列 $(\boldsymbol{p_1, p_2, \cdots, p_n})$ が $(\boldsymbol{1, 2, \cdots, n})$ に並び替える」**操作により**「最初の添え字の順列 $(\boldsymbol{1, 2, \cdots, n})$ が $(\boldsymbol{q_1, q_2, \cdots, q_n})$ になった」**のである。

入れ替えの総回数

- $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ を $(1, 2, \cdots, n)$ にするために行った隣接する入れ替えの回数を k とする。
- k 回で $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ を $(1, 2, \cdots, n)$ にすることができるならば、
  $(1, 2, \cdots, n)$ を k 回の入れ替えで $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ にすることができる。
- $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ から $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ へは $2k$ 回の入れ替えで移ることができる。
- 定理 III–1 – 1 により符号の変化は $2k$ 回起こる。$2k$ は偶数だから符号は変化しない。

$$\varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n) = \varepsilon(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{9}$$

が成り立つ

以上により (1) が成り立つ。（終）

問題 III–**2 − 1**

以下の式が成り立つことを両辺を別々に計算して確かめよ。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

問題 III–**2 − 2**

以下の式が成り立つことを両辺を別々に計算して確かめよ。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.2.1　性質 1 によってもたらされること

性質 1 により行について成り立つことは列についても成り立つし、列について成り立つことは行についても成り立つ。

以下に述べる性質は行の性質として証明するが、性質 1 により列の性質としても当然成り立つ。

2.3　性質 2

性質 2

行列式の 2 つの行を入れ替えると、行列式の値は符号だけが逆になる。

即ち

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{10}
$$

が成り立つ。左辺の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列式が右辺であり、その時符号のみが反転する。

証明

(10) 左辺の行列式の展開式は

$$\sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_j, \cdots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} \tag{11}$$

であるが、左辺行列式の i 行と j 行 を入れ替えると

$$\sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_j, \cdots, p_i, \cdots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \tag{12}$$

となる。

(11) (12) 両式の積の部分

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \tag{13}$$

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \tag{14}$$

は掛ける順序が変わってもその積そのものは変わらない。

一方 (11) (12) 両式の符号の部分

$$\varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_j, \cdots, p_n) \tag{15}$$

$$\varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_j, \cdots, p_i, \cdots, p_n) \tag{16}$$

は定理 III–1 – 1 系により符号が逆転する。

よって、i 行と j 行を入れ替えることによって展開式の中の全ての項の符号が一斉に反転するから行列式の値は符号が逆になる。(終)

2.4　性質 2 系

性質 2 系

2 つの行が同じである行列式の値はゼロである。

証明

i 行目と j 行目が同じである行列式

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \tag{17}$$

を考える。説明上 i 行目を青、j 行目を赤であらわす。

i 行目と j 行目を入れ替えると性質 2 により、符号が逆転する。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \tag{18}$$

- 符号が変わっても行列式そのものは同じである。
- 符号が変わっても値が同じものは 0 しかない。
- よってこの行列式の値は 0 である。(終)

2.5 性質 3

性質 3

行列式の 1 つの行が共通因子 α を持てば、この α を行列式の外に括りだすことができる。

即ち

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \alpha
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{19}
$$

が成り立つ。

証明

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots \alpha a_{ip_i}, \cdots, a_{np_n} && (20) \\
&= \alpha \left(\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i}, \cdots, a_{np_n} \right) = \text{右辺} && (21)
\end{aligned}
$$

2.6　性質 3 系

性質 3 系

行列式の 1 つの行の全ての成分が 0 であれば行列式の値は 0 である。

証明

性質 3 で $\alpha = 0$ とすればよい。(終)

問題 III–2 – 3

行列式の 1 つの行が他の行の α 倍になっていれば、その行列式の値は 0 であることを証明しなさい。

問題 III–2 – 4

n 次行列式の全ての成分を α 倍すれば、行列式の値は α^n 倍されることを証明しなさい。

2.7　性質 4

性質 4

行列式の 1 つの行の各成分が 2 つの数の和に分解されていれば、この行列式を、それぞれの数を成分とする 2 つの行列式の和に分解できる。

即ち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{22}$$

が成り立つ。

証明

(22) の展開式は

$$\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(a_{ip_i}+b_{ip_i})\cdots a_{np_n} \tag{23}$$

である。

ここで、(23) の積は

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(a_{ip_i}+b_{ip_i})\cdots a_{np_n} = a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} + a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n} \tag{24}$$

である。

よって (23) は

$$\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} + \sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n} \tag{25}$$

と分解できる。(25) 第 1 項は (22) 右辺第 1 項の展開式であり、第 2 項は (22) 右辺第 2 項の展開式である。(終)

性質 4 を繰り返し適用すれば、行列式の 1 つの行が m 個の数の和になっているときに、その行列式を、それぞれの数を成分とする m 個の行列式の和に分解することができる。

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} & a_{23}+b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\qquad = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{26}
$$

問題 III−2 − 5

次の関係が成り立つことを確かめなさい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.8　性質 5

性質 5

行列式の 1 つの行の各成分に定数 α を掛けたものを他の行の対応する成分に加えても、行列式の値は変わらない。

即ち

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{j1} + \alpha a_{i1} & a_{j2} + \alpha a_{i2} & \cdots & a_{jn} + \alpha a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{27}
$$

が成立する。

証明

性質 4 により

$$
(27)\ 右辺 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{28}
$$

性質 3 により (28) 第二項は

$$\alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{29}$$

(29) 第 i 行と第 j 行が同じなので性質 2 系により、0 である。従って、(27) が成り立つ。

例題 III–**2 − 1**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \tag{30}$$

の値を求めなさい。

解法

行列式 (30) 第 3 行に –1 を掛けて第 4 行に加える。

つまり、第 4 行から第 3 行を引く。

$$(30) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \tag{31}$$

行列式 (31) 第 3 行から第 2 行を引く。

すると、

$$
(31) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \tag{32}
$$

行列式 (32) 第 3 行と第 4 行が同じであるから性質 2 系により、その値は 0 である。よって行列式 (30) の値は 0 である。

2.9 まとめ

- 行列式の行と列を入れ替えた行列式の値は等しい（性質 1）。
- 行列式の 2 つの行を入れ替えると、行列式の符号が逆になる（性質 2）。
- 2 つの行が同じである行列式の値は 0 である (性質 2 系)。
- 行列式の 1 つの行が共通因数 α をもてば、行列式の外に括りだすことができる。(性質 3)。
- 行列式の 1 つの行の全ての成分が 0 であれば行列式の値は 0 である。(性質 3 系)
- 行列式の 1 つの行の各成分が 2 つの数の和に分解されていれば、この行列をそれぞれの数を成分とする 2 つの行列式の和に分解できる (性質 4)。
- 行列式の 1 つの行の各成分に定数 α をかけたものを他の行の対応する成分に加えても、行列式の値は変わらない (性質 5)。

- 行で成り立つことは列でも成り立つ。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版)』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著 「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8.『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9.『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著 「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10.『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11.『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版