第 III 部　行列式

目次

1 行列式の定義

1.1 はじめに

- 連立方程式の解を求める問題は何度も解いたと思います。
- 行列式は連立方程式と密接に関連します。

1.1.1 ポイント

- 異なる自然数からなる順列
- 順序対
- 転倒の個数
- 順列の符号
- 行列式の定義

1.2　順列とその符号

n 個の異なった自然数を並べた順列

$$p_1,\ p_2, \cdots,\ p_i, \cdots,\ p_j, \cdots,\ p_n \tag{1}$$

を考える。

- 順列 (1) が小さい順に並んでいれば、この順列は『自然の順序』に並んでいるという。
- そうでない場合は、この順列の中に『転倒』があるという。

1.2.1 転倒

『転倒』を以下のように定義する。

順列 (1) の中から 2 つの数 p_i と p_j を取り出してそれらの組 (p_i, p_j) をつくる。ここで p_i と p_j を並べる順序は順列 (1) の中でそれらが並んでいる順序と同じにする。この $(p_i,\ p_j)$ を『順序対（つい）』という。このとき

- $p_i < p_j$ であれば、この順序対 $(p_i,\ p_j)$ は『転倒していない』という。
- $p_i > p_j$ であれば、この順序対 $(p_i,\ p_j)$ は『転倒している』という。

順列 (1) から作ることのできる順序対の個数は ${}_nC_2$ 個あるが、その中の転倒している順序対の数を順列 (1) の『転倒の個数』という。

1.2.2 遇順列と奇順列

転倒の個数が偶数個である順列を『遇(ぐう)順列』といい、奇数個である順列を『奇(き)順列』という。転倒の個数が 0 である順列は遇順列として扱う。

補題 III−1 − 1

順列 (1) において隣り合った 2 つの数、p_i と p_{i+1} を入れ替えた順列を作ると、この順列と元の順列とでは、転倒の個数の差は 1 つである。

証明

p_i と p_{i+1} の位置だけを入れ替えて得られる 2 つの順列

$$p_1,\ p_2, \cdots,\ p_{i-1},\ p_i,\ p_{i+1},\ p_{i+2}, \cdots,\ p_n \tag{2}$$

$$p_1,\ p_2, \cdots,\ p_{i-1},\ p_{i+1},\ p_i,\ p_{i+2}, \cdots,\ p_n \tag{3}$$

(2) と (3) における転倒の個数の差は $(p_i,\ p_{i+1})$ と $(p_{i+1},\ p_i)$ から生ずる差だけである。

(2) と (3) をそれぞれ 3 つのグループに分ける。

$$\{p_1,\ p_2, \cdots,\ p_{i-1}\} \tag{4}$$

$$\{p_i,\ p_{i+1}\} \tag{5}$$

$$\{p_{i+2}, \cdots,\ p_n\} \tag{6}$$

(4) と (6) は二つの順列 (2)(3) で全く同じである。従って、(4) の中だけ、あるいは (6) の中だけで作られる順序対および、一方が (4) に含まれ、もう一方が (6) に含まれる順序対をつくったとき、二つの順列 (2)(3) の転倒の個数に差はない。(4) と (5) の間、(5) と (6) の間で作られる順序対においても、p_i と p_{i+1} の入れ替えによって、転倒している順序対の個数は影響されない。

(2) と (3) における転倒の個数の差は (5) の中だけで生ずるが、$(p_i,\ p_{i+1})$ と $(p_{i+1},\ p_i)$ のうち一方は転倒しており、一方は転倒していないから、その差は 1 つである。

以上により (2) と (3) の転倒の個数の差は 1 つだけである。（終）

補題 III–1 − 2

順列 (1) における二つの数 p_i と p_j を入れ替えた順列を作ると、この順列と元の順列 (1) とでは、転倒の個数の差は奇数個である。

証明

$$p_1,\ p_2, \cdots,\ p_{i-1},\ p_i,\ p_{i+1}, \cdots,\ p_{j-1},\ p_j,\ p_{j+1}, \cdots,\ p_n \tag{7}$$

において p_i と p_j を入れ替えると

$$p_1,\ p_2, \cdots,\ p_{i-1},\ p_j,\ p_{i+1}, \cdots,\ p_{j-1},\ p_i,\ p_{j+1}, \cdots,\ p_n \tag{8}$$

である。

ここで隣り合う数との入れ替えを繰り返して、(7) が (8) になることを考える。隣り合う数との入れ替えは p_i と p_j に挟まれた部分だけで行えばいいから (7) の

$$p_i,\ p_{i+1}, \cdots,\ p_{j-1},\ p_j \tag{9}$$

の部分と (8) の

$$p_j,\ p_{i+1}, \cdots,\ p_{j-1},\ p_i \tag{10}$$

の部分を取り出して、(9) に、隣との入れ替えを何回繰り返せば (10) になるのかを調べる。

まず、(9) の左端にある p_i を次々に右隣と入れ替えて右端に持ってくると

$$p_{i+1}, \cdots,\ p_{j-1},\ p_j,\ p_i \tag{11}$$

となるが、この場合隣との入れ替えの回数は $j-i$ 回である。

次いで右端から二番目の p_j を左隣と入れ替えて左端まで持ってくると (10) になるが、この時入れ替えの個数は前回より 1 回少なくなるから $j-i-1$ 回である。こうして、(9) に

$$(j-i)+(j-i-1) = j-i-j-1-1 \tag{12}$$

$$= 2(j-i)-1 \tag{13}$$

回入れ替えを行うと (10) になる。(13) は奇数である。ところで補題 III–1 – 1 により、1 回の隣りとの入れ替えによる転倒の個数の変化は 1 つであるから、奇数回の入れ替えによって転倒の個数は奇数個かわる。よって順列 (7) と (8) の転倒の個数の差は奇数である。(終)

定理 III–1 – 1

異なる自然数の順列

$$p_1,\ p_2, \cdots,\ p_i, \cdots,\ p_j, \cdots,\ p_n \tag{14}$$

において、任意の 2 つの数 p_i と p_j を入れ替えると、順列の偶奇が逆になる。

証明

補題 III–1 – 2 により p_i と p_j の入れ替えによって転倒の個数が奇数個変わるから、結果として順列の偶奇が逆になることは明らかであろう。(終)

1.2.3 順列の符号

順列 $(p_1,\ p_2,\cdots,p_3)$ の転倒の個数を N としたき

$$\varepsilon(p_1,\ p_2,\cdots,p_3)=(-1)^N \tag{15}$$

によって $\varepsilon(p_1,\ p_2,\cdots,p_3)$ を定義し、順列 $(p_1,\ p_2,\cdots,p_3)$ の『符号』という。

この定義から明らかに

$$\varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\begin{cases}+1 & ;(p_1,p_2,\cdots,p_n)\text{ が遇順列のとき}\\ -1 & ;(p_1,p_2,\cdots,p_n)\text{ が奇順列のとき}\end{cases} \tag{16}$$

である。

定理 III–1 − 1 系

互いに異なった数からなる順列の中の 2 つの数を入れ替えると、順列の符号は逆になる。

証明

定理 III–1 − 1 により p_i と p_j の入れ替えによって順列の偶奇が逆になるのだから、N の偶奇が逆になる。(終)

1.3　行列式の定義

n^2 個の数を、添え字を 2 つ右下につけた n^2 個の文字

$$a_{ij} \quad ; \ i = 1, 2, \cdots, n, \ j = 1, 2, \cdots, n \quad (17)$$

であらわし、これらを正方形に配置した表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (18)$$

をつくる。この表を『行列』という。とくに (18) は正方形に配置されているので『正方行列』という。この時の n を使い (18) を『n 次正方行列』または『n 次の行列』という。

文字 a_{ij} を行列の『成分』という。横に並んだ数の配置を『行』といい、縦に並んだ数の配置を『列』という。

最上段の

$$a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n} \tag{19}$$

を『第 1 行』といい、順に下に向かって第 2 行, 第 3 行,$\cdots$, 第 n 行という。

縦の列は最左端の

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix} \tag{20}$$

を第 1 列といい、順に右に向かって第 2 列, 第 3 列,$\cdots$, 第 n 列という。

ここで、要素の積を作ることを考える。行列 (18) のそれぞれの行から 1 つずつ成分を選ぶ。この時第 1 行から選ばれる成分を

$$a_{1p_1} \tag{21}$$

とし、第 2 行から選ばれる成分を

$$a_{2p_2} \tag{22}$$

とする。これを第 n 行まで続け、第 n 行から選ばれる成分を

$$a_{np_n} \tag{23}$$

とし、これらの全ての積

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{24}$$

を作る。その際、各行から選ばれた成分の属する列の番号 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ の中に同じ番号が無いようにする。

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ は行の番号だから、1 から n までのどれかである。この中に同じものが無いのであれば

$$(p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{25}$$

は 1 から n までの数の順列になっている。即ち、積 (24) は、それぞれの行から 1 つずつ、しかも、どの列からも 1 つずつ選ばれた成分の積である。

このように選ばれた積 (24) は、1 から n までの全ての順列の個数、$n!$ 個だけ作ることができる。

次に、$n!$ 個の積 (24) に符号をつける。その際、積 (24) に着ける符号は順列 (25) の符号

$$\varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{26}$$

を採用する。

こうして符号のついた積

$$\varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n)\ a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{27}$$

を $n!$ 個作り、それらの和を作る。

この和を行列 (18) の『行列式』といい、行列 (18) の (　) を |　| で置き換えた記号であらわす。即ち行列 (18) の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \cdots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{28}$$

で定義される。ここで $\displaystyle\sum_{(p_1,p_1,\cdots,p_n)}$ は、1,2,$\cdots$,n からつくられるすべての順列 $(p_1, p_1, \cdots, p_n)$ の和をあらわす記号である。(28) 右辺は計算すると一つの「値」となるが、この「値」を左辺の『行列式の値』または単に『行列式』という。

1.3.1 2 次の正方行列の行列式 —数値例—

2 次の正方行列を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{29}$$

とする。1 行目から a_{11} を選ぶと成分の積は

$$a_{11}a_{22} \tag{30}$$

1 行目から a_{12} を選ぶと成分の積は

$$a_{12}a_{21} \tag{31}$$

である。(30) の符号は

$$\varepsilon(1,2) \tag{32}$$

であり、(31) の符号は

$$\varepsilon(2,1) \tag{33}$$

である。

よって

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(1,2)a_{11}a_{22} + \varepsilon(2,1)a_{12}a_{21} \tag{34}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{35}$$

1.3.2　3 次の正方行列の行列式　—数値例—

3 次の正方行列を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{36}$$

とする。

1 行目から a_{11} を選んだときの可能な積は

$$a_{11}a_{22}a_{33} \tag{37}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \tag{38}$$

1 行目から a_{12} を選んだときの可能な積は

$$a_{12}a_{21}a_{33} \tag{39}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \tag{40}$$

1 行目から a_{13} を選んだときの可能な積は

$$a_{13}a_{21}a_{32} \tag{41}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} \tag{42}$$

積は全てで $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ である。

これらに符号をつけて和をとると、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & \varepsilon(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \varepsilon(1,3,2)a_{11}a_{23}a_{32} \\ & +\varepsilon(2,1,3)a_{12}a_{21}a_{33} + \varepsilon(2,3,1)a_{12}a_{23}a_{31} \\ & +\varepsilon(3,1,2)a_{13}a_{21}a_{32} + \varepsilon(3,2,1)a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{43}$$

符号を ± 1 に置き換えると

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{44}$$

(35) (44) を Sarras の方法という。

問題 III**−1 − 1**

次の行列式を計算しなさい。

(1) $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

(5) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

解例 III−1 − 1

(1)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - cd$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 = 0$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 45 + 16 + 2 + 20 - 6 + 12 = 89$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

(5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ab^2 + ac^2 - a^2b - ac^2 - b^2c$$

問題 III**—1 − 2**

次の行列式を計算しなさい。

(1)
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(4)
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

問題 III−1 − 3

次の行列式を計算しなさい。

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

問題 III−1 − 4

次の行列式を計算しなさい。

(1)
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(4)
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

1.4　まとめ

- n^2 個の数を正方形に並べた表を (　) で囲み、n 次正方行列という。
- n 次正方行列の (　) を |　| に変えたものを行列式の値という。
- 行列式の値を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,p_1,\cdots,p_n)} \varepsilon(p_1,p_2,\cdots,p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

と定義する。

参考文献

1. 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
2. 『新体系 大学数学 入門の教科書 上下』吉沢光雄著「講談社」2022 年 6 月 16 日
3. 『技術者のための高等数学 7 確率と統計（原書代 8 版）』E・クライツィグ著　田栗正章訳「培風館」2004 年 11 月 30 日第 8 版
4. 『データ解析のための数理統計入門』久保川達也著「共立出版」2023 年 10 月 15 日初版
5. 『統計学入門』東京大学教養学部統計学教室篇「東京大学出版会」1991 年 7 月 9 日初版
6. 『行動科学における統計解析法」芝祐順・南風原朝和著 「東京大学出版会」1990 年 3 月 20 日　初版
7. 『計量経済学の理論』A.S. ゴールドバーガー著, 福地崇生・森口親司訳「東洋経済新報社」

1970 年 9 月 10 日 第 1 刷

8. 『計量経済学序説』R.J. ウォナコット・T.H. ウォナコット著, 国府田恒夫・田中一盛訳「培風館」 1975 年 6 月 10 日初版
9. 『マーケティング・サイエンス』片平秀貴著 「東京大学出版会」1987 年 4 月 20 日初版
10. 『回帰分析』佐和光男著 「朝倉書店」1979 年 4 月 20 日初版
11. 『完全独習　統計学入門』小島寛之著「ダイヤモンド社」2006 年 9 月 28 日　初版