第 IX 部　統計的検定

9　χ^2 分布と区間推定

- χ^2 分布
- χ^2 分布の 95%信頼区間
- 母平均が既知のときの母分散の区間推定
- 母平均が未知のときの母分散の区間推定

9.1　はじめに

- 事前情報があればいろいろ捗ります。
- 事前情報が無ければ、手元の情報で何とかしなくてはなりません。
- 得られた情報から母分散を推定します。

9.1.1　平均

n 個の数値があり、i 番目の値を x_i であらわす。n 個ある数値を全て足し合わせることを『総和』といい $\sum_{i=1}^{n} x_i$ であらわす。x_i の総和を n で割った値を『平均』といい $\bar{x}$ であらわす。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

9.1.2　分散

x_i と $\bar{x}$ の差

$$x_i - \bar{x} \tag{2}$$

を『平均からの偏差』という。『平均からの偏差』の二乗

$$(x_i - \bar{x})^2 \tag{3}$$

の平均を『分散』といい V_x であらわす。

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{4}$$

9.1.3 共分散

二つの数値からなる組が n 組ある。数値を区別する記号に x, y、組を識別する添え字に i を採用し、i 番目の組を (x_i, y_i) とあらわす。x_i の平均からの偏差と y_i の平均からの偏差の積の平均を『共分散』いい、Cov_{xy} であらわす。

$$Cov_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{5}$$

9.1.4 相関係数

共分散を x, y のそれぞれの標準偏差で割った値を『相関係数』といい ρ_{xy} であらわす。

$$\rho_{xy} = \frac{Cov_{xy}}{\sqrt{V_x}\sqrt{V_y}} \tag{6}$$

$$\rho_{xy} = 0 \tag{7}$$

のことを『無相関』という。無相関であれば、$Cov_{xy} = 0$ である。

9.1.5 和の平均と平均の和

無相関な二つの数値からなる組が n 組ある。数値を区別する記号に x, y、組を識別する添え字に i を採用し、i 番目の組を (x_i, y_i) とあらわす。ここで

$$w_i = x_i + y_i \tag{8}$$

とおき、w の平均を求める。

$$\bar{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \tag{9}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i) + \sum_{i=1}^{n}(x_i)\right) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i) \tag{12}$$

$$= \bar{x} + \bar{y} \tag{13}$$

9.1.6 和の分散と分散の和

同様に、w の分散を求める。

$$V_w = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \tag{14}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((x_i + y_i) - (\bar{x} + \bar{y}))^2 \tag{15}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i - \bar{x} - \bar{y})^2 \tag{16}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y}))^2 \tag{17}$$

$$
= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i - \bar{x} \right)^2 + 2 \left(x_i - \bar{x} \right) \left(y_i - \bar{y} \right) + \left(y_i - \bar{y} \right)^2 \right) \tag{18}
$$

$$
= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right) \left(y_i - \bar{y} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2 \right) \tag{19}
$$

$$
= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2 + 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right) \left(y_i - \bar{y} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2 \tag{20}
$$

仮定により第 2 項は 0 なので、

$$
= V_x + V_y \tag{21}
$$

9.1.7　平均と分散の公式

無相関な 2 つの変数の組 (x_i, y_i) を考える。$w_i = x_i + y_i$ とおくと、以下の関係が成り立つ。

$$\bar{w} = \bar{x} + \bar{y} \tag{22}$$

$$V_w = V_x + V_y \tag{23}$$

9.2　χ^2 分布

9.2.1　標準正規分布

平均 0, 分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ を『標準正規分布』という。標準正規分布の確率密度関数は、

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \tag{24}$$

である。

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う変数のことを、特に『正規偏差』といい z であらわす。$N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数 x を標準化すると

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{25}$$

正規偏差 z に変換できる。

9.2.2　χ^2 分布

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う n 個の独立な確率変数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ の平方和から統計量を作り $\chi^2_{(z)}$ とあらわす。

$$\chi^2_{(z)} = \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 \tag{26}$$

このとき n を『自由度』といい ν を使ってあらわす。$\chi^2_{(z)}$ が従う分布を『自由度 $\nu = n$ の χ^2 分布[1)]』という。$\chi^2_{(z)}$ は、z_i の平方和なので非負値の統計量である。

1）　χ はギリシャ文字カイ (chi) の小文字。アルファベットのエックス (x) と紛らわしいためカタカナでカイ二乗とあらわすこともある。

9.2.3 χ^2 分布の和

2 つの確率変数 u_1, u_2 が独立にそれぞれ χ^2 分布に従うとする。

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 \tag{27}$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{m} {z_j}^2 \tag{28}$$

u_1 と u_2 の和を u_3 とあらわす。

$$u_3 = u_1 + u_2 \tag{29}$$

(27) (28) を代入すると

$$u_3 = \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 + \sum_{j=1}^{m} {z_j}^2 \tag{30}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m} {z_i}^2 \tag{31}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+m} {z_i}^2 \tag{32}$$

となり、u_3 は自由度 $\nu = n + m$ の χ^2 分布に従う。

9.2.4　χ^2 分布の 95% 信頼区間

χ^2 分布は自由度 ν によってその形を大きく変える。分布の左右にそれぞれ 2.5%の領域をとり、中央部分に 95%の区間をとる。このとき、左側の臨界値を $\chi^2_{.025}$ とあらわし、右側の臨界値を $\chi^2_{0.975}$ とあらわす。

左右の臨界値に挟まれる区間を『95%信頼区間』という。この 95%信頼区間は、(26) によって得られる統計量 $\chi^2_{(z)}$ が 95%の確率で含まれる区間である。

表 1　χ^2 分布の 95% 信頼区間の臨界値

ν	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.975}$
1	0.001	5.024
2	0.051	7.378
3	0.216	9.348
4	0.484	11.143
5	0.831	12.833
6	1.237	14.449
7	1.690	16.013

ν	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.975}$
8	2.180	17.535
9	2.700	19.023
10	3.247	20.483
20	9.591	34.170
25	13.120	40.646
50	32.357	71.420
100	74.222	129.561

図 1 自由度 $\nu = 3$ の $\chi^2_{(z)}$ の確率密度関数の 95%信頼区間

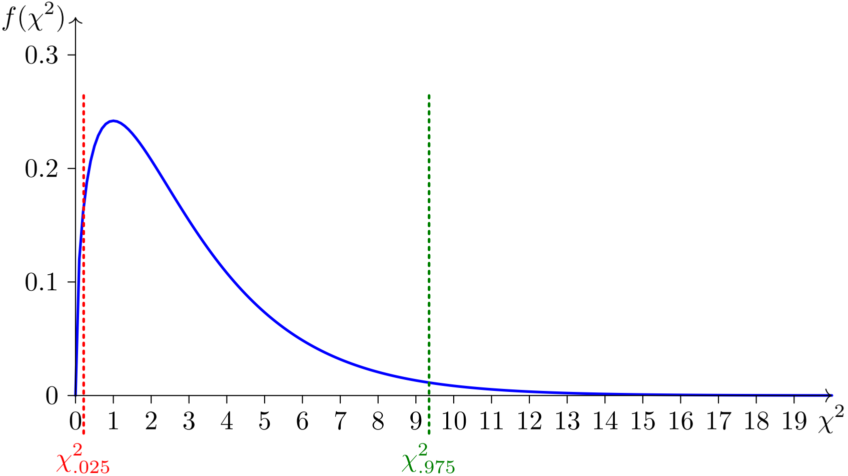


図 2　自由度 $\nu = 4$ の $\chi^2_{(z)}$ の確率密度関数の 95%信頼区間

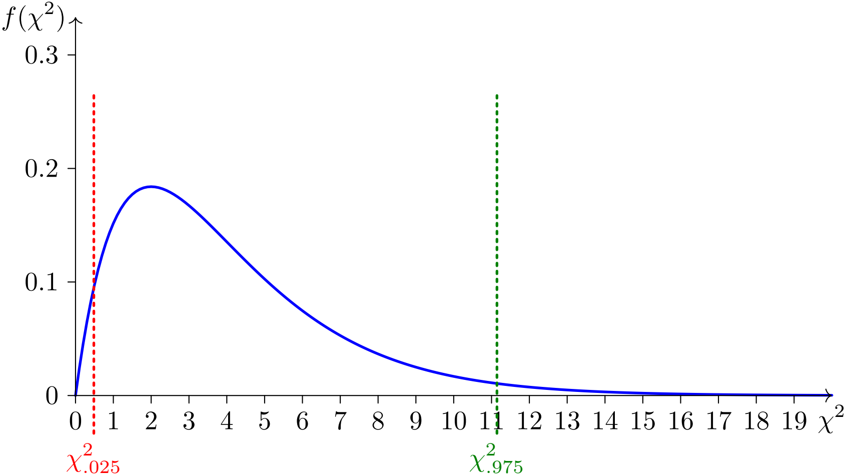


図 3　自由度 $\nu = 5$ の $\chi^2_{(z)}$ の確率密度関数の 95%信頼区間

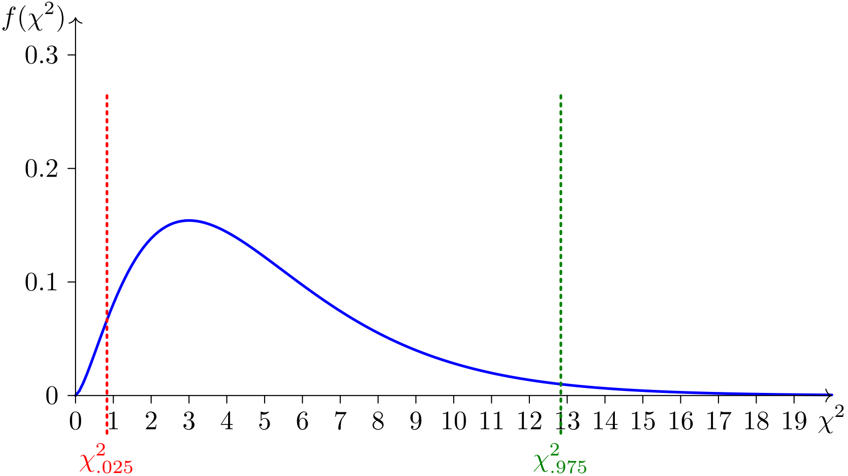


図 4　自由度 $\boldsymbol{\nu = 6}$ の $\boldsymbol{\chi^2_{(z)}}$ の確率密度関数の 95%信頼区間

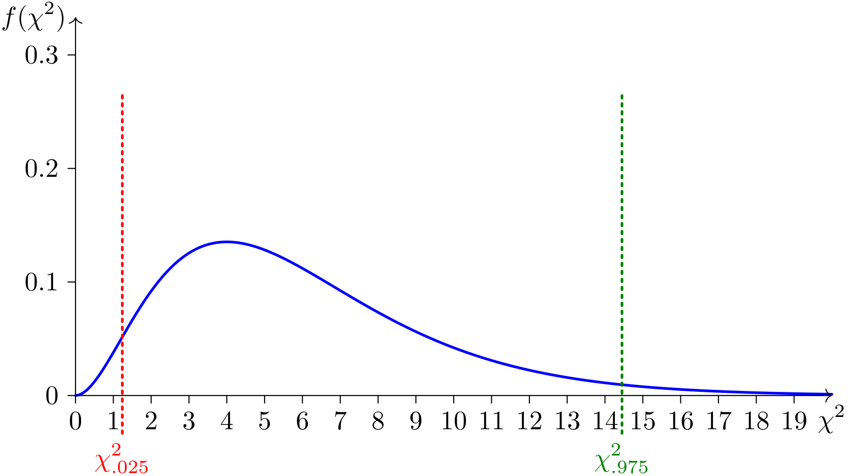


図 5　自由度 $\nu = 7$ の $\chi^2_{(z)}$ の確率密度関数の 95%信頼区間

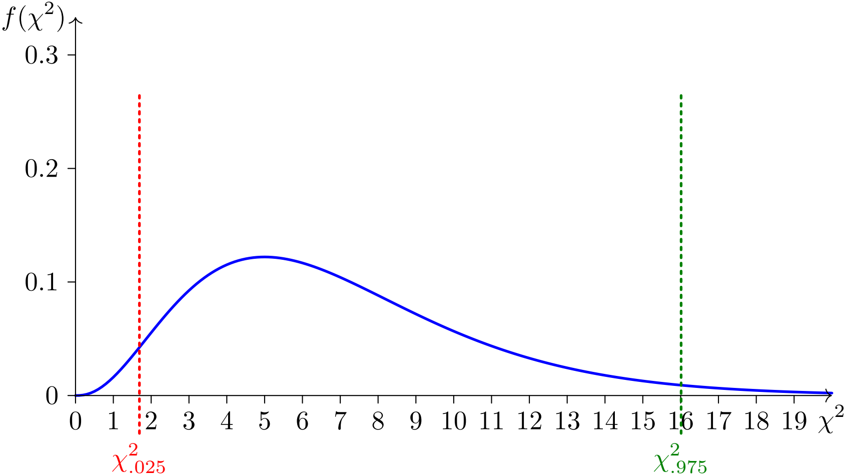


図 6　自由度 $\nu = 8$ の $\chi^2_{(z)}$ の確率密度関数の 95%信頼区間

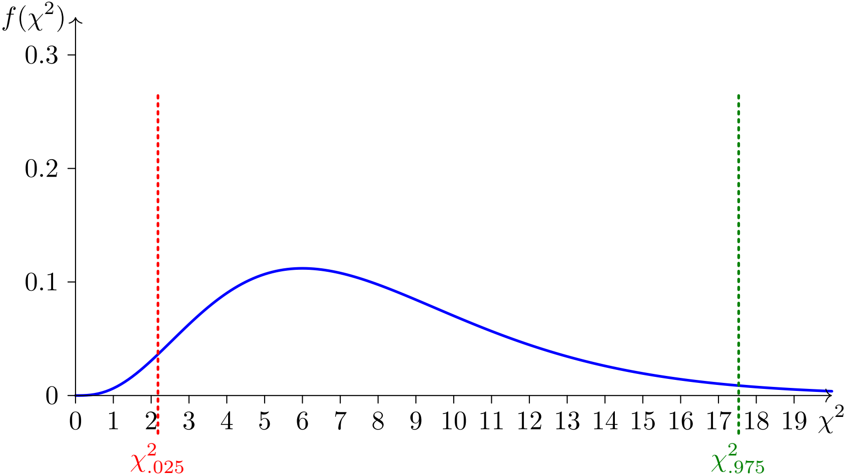
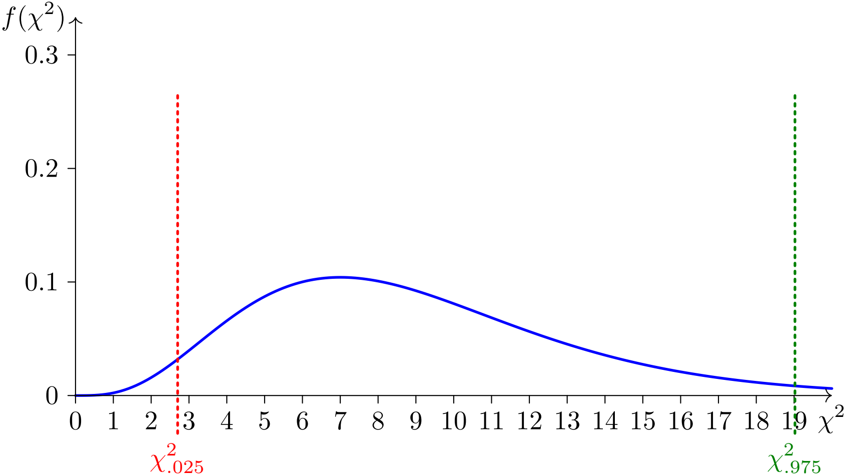


図 7　自由度 $\nu = 9$ の $\chi^2_{(z)}$ の確率密度関数の 95%信頼区間



9.3　母平均 μ が既知のときの母分散の区間推定

母平均 μ が既知 $(\mu = \mu^*)$ であるとする。正規母集団 $N(\mu^*,\ \sigma^2)$ から、サンプルサイズ n の標本を抽出し、それぞれの値を x_i であらわす。

この時、

$$\chi^2_{(\mu)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \mu^*)^2}{\sigma} \right)^2 \tag{33}$$

は、自由度 $\nu = n$ の χ^2 分布に従う。

9.3.1 数値例

$\mu = 80$ と分かっている正規母集団から $n = 3$ の標本を抽出したところ、

$$\{76,\ 85,\ 83\}$$

であった。$n = 3$ の標本から $\chi^2_{(\mu)}$ を作ると、

$$\begin{aligned}
\chi^2_{(\mu)} &= \left(\frac{76-80}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{85-80}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{83-80}{\sigma}\right)^2 && (34)\\
&= \frac{(-4)^2}{\sigma^2} + \frac{5^2}{\sigma^2} + \frac{3^2}{\sigma^2} && (35)\\
&= \frac{16}{\sigma^2} + \frac{25}{\sigma^2} + \frac{9}{\sigma^2} = \frac{50}{\sigma^2} && (36)
\end{aligned}$$

$\chi^2_{(\mu)} = \dfrac{50}{\sigma^2}$ は自由度 $\nu = 3$ の χ^2 分布に従うので、95%信頼区間は、表 1 より

$$0.216 \leqq \frac{50}{\sigma^2} \leqq 9.348 \tag{37}$$

(37) 左辺・中央部分より

$$0.216 \leqq \frac{50}{\sigma^2} \tag{38}$$

$$0.216\,\sigma^2 \leqq 50 \tag{39}$$

$$\sigma^2 \leqq \frac{50}{0.216} \tag{40}$$

$$\sigma^2 \leqq 231.701 \tag{41}$$

(37) 右辺・中央部分より

$$\frac{50}{\sigma^2} \leqq 9.348 \tag{42}$$

$$\frac{50}{9.348} \leqq \sigma^2 \tag{43}$$

$$5.349 \leqq \sigma^2 \tag{44}$$

これらを併せると母分散の 95%信頼区間は、

$$5.349 \leqq \sigma^2 \leqq 231.701 \tag{45}$$

である。この区間を推定することを『母平均が既知のときの母分散の区間推定』という。

問題 IX$-\mathbf{9-1}$

$\mu = 80$ と分かっている正規母集団から標本を抽出したところ、

$$\{76,\ 77,\ 83,\ 84\}$$

であった。母分散の 95%信頼区間を求めよ。

解例 IX**−9 − 1**

$$\chi^2_{(\mu)} = \left(\frac{76-80}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{77-80}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{83-80}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{84-80}{\sigma}\right)^2 = \frac{50}{\sigma^2}$$

$$n = 4$$

表 1 より、自由度 $\nu = 4$ の χ^2 分布の 95%信頼区間は、

$$0.484 \leqq \frac{50}{\sigma^2} \leqq 11.143$$

$$4.487 \leqq \sigma^2 \leqq 103.216$$

従って、母分散は 95%の確率で $4.487 \leqq \sigma^2 \leqq 103.216$ に含まれる。

9.4 標本分散と χ^2 分布

9.4.1 標本平均

標本に属する要素の平均を『標本平均』といい $\bar{X}$ であらわす。標本に属する要素の数を n とし、i 番目の要素を x_i とすると、

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{46}$$

で求めることができる。

9.4.2 標本分散

標本の分散を『標本分散』といい s^2 であらわす。

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2 \tag{47}$$

9.4.3 標本平均と χ^2 分布

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 x を標準化すると z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。そこで、$N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の標本について

$$\chi^2_{(\mu)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \tag{33}$$

は自由度 $\nu = n$ の χ^2 分布に従う。

また、μ のかわりに標本平均 $\bar{X}$ を用いた統計量

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \tag{48}$$

は、自由度 $\nu = n - 1$ の χ^2 分布に従うことが知られている。

9.4.4　自由度が減る理由

$N(\mu, \sigma^2)$ に従う二つの独立な確率変数を x_1 と x_2 とする。この二つの変数の標本平均を求めると

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{49}$$

μ の代わりに $\bar{X}$ を用いて標準化をおこなうと、

$$w_1 = \frac{x_1 - \bar{X}}{\sigma} \tag{50}$$

$$w_2 = \frac{x_2 - \bar{X}}{\sigma} \tag{51}$$

である。

これらの二乗和を求める。

$$
{w_1}^2 + {w_2}^2 = \left(\frac{x_1 - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \tag{52}
$$

$\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a^2}$ なので

$$
= \frac{\left(x_1 - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} + \frac{\left(x_2 - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \tag{53}
$$

分数から分子を掃き出し

$$
= \frac{1}{\sigma^2}\left(x_1 - \bar{X}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left(x_2 - \bar{X}\right)^2 \tag{54}
$$

$\bar{X}$ に (49) を代入

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \tag{55}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{2x_1 - (x_1 + x_2)}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{2x_2 - (x_1 + x_2)}{2}\right)^2 \tag{56}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)^2}{2^2\sigma^2} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2^2\sigma^2} \tag{57}$$

$(a-b)^2 = (b-a)^2$ なので、

$$= \frac{\cancel{2}(x_1 - x_2)^2}{2^{\cancel{2}}\sigma^2} \tag{58}$$

約分して

$$= \frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma^2} \tag{59}$$

$$= \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \tag{60}$$

$$= \left(\frac{x_1 + (-x_2)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \tag{61}$$

ここで、x_2 は、平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ なので、$-x_2$ は、平均 $-\mu$, 分散 σ^2 の正規分布 $N(-\mu, \sigma^2)$ である。

そして、x_1 の平均は μ であって x_2 の平均は $-\mu$ だから、$x_1 + (-x_2)$ の平均は $\mu - \mu = 0$ である。

また、x_1 の分散は σ^2,x_2 の分散も σ^2 だから、$x_1 + (-x_2)$ の分散は $\sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2$ である。

従って、$(x_1+(-x_2))$ は、平均 0, 分散 $2\sigma^2$ の正規分布 $N(0,2\sigma^2)$ なので、

$$w_3=\frac{(x_1+(-x_2))-0}{\sqrt{2}\sigma}=z \tag{62}$$

は標準正規分布に従う。

従って、${w_3}^2$ つまり、$({w_1}^2+{w_2}^2)$ は自由度 $\nu=1$ の χ^2 分布に従う。

9.4.5 $\chi^2_{(\bar{X})}$ と標本分散 s^2

(48) は自由度 $\nu = n-1$ の χ^2 分布である。

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \tag{48}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2 \tag{63}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(n\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2 \tag{64}$$

(47) を代入する

$$= \frac{ns^2}{\sigma^2} \tag{65}$$

標本分散 s^2 の確率分布は自由度 $\nu = n-1$ の χ^2 分布を用いてあらわすことができる。

$\chi^2_{(\bar{X})}$ は標本分散 s^2 に比例する統計量である。

例題 2

正規母集団から $n = 4$ の標本を抽出した。標本の要素は

$$\{3, 9, 11, 17\}$$

であった。標本平均 $\bar{X}$, 標本分散 s^2, $\chi^2_{(\bar{X})}$, 自由度 ν を求めなさい。

解法

$$\bar{X} = \frac{3+9+11+17}{4} = 10 \tag{66}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(3-\bar{X})^2+(9-\bar{X})^2+(11-\bar{X})^2+(17-\bar{X})^2}{n} \\ &= \frac{(3-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(17-10)^2}{4} = 25 \end{aligned} \tag{67}$$

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{4\times 25}{\sigma^2} = \frac{100}{\sigma^2} \tag{68}$$

$$\nu = n-1 = 3 \tag{69}$$

従って、$\chi^2_{(\bar{X})} = \dfrac{100}{\sigma^2}$ は自由度 $\nu = 3$ の χ^2 分布に従う。

問題 IX−**9 − 2**

正規母集団から $n = 5$ の標本を抽出した。標本の要素は

$$\{1, 5, 7, 9, 13\}$$

であった。標本平均 $\bar{X}$, 標本分散 s^2, $\chi^2_{\bar{X}}$, 自由度 ν を求めなさい。

解例 IX−**9 − 2**

$$\bar{X} = \frac{1+5+7+9+13}{5} = 7 \tag{70}$$

$$s^2 = \frac{(1-7)^2+(5-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2+(13-7)^2}{5} = 16 \tag{71}$$

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \frac{5\times 16}{\sigma^2} = \frac{80}{\sigma^2} \tag{72}$$

$$\nu = 5-1 = 4 \tag{73}$$

従って、$\chi^2_{(\bar{X})} = \dfrac{80}{\sigma^2}$ は自由度 $\nu = 4$ の χ^2 分布に従う。

9.5　母平均 μ が未知のときの母分散の区間推定

これまでの議論で以下の点が確認された。

- 正規母集団から得られたサンプルサイズ n の標本の標本平均 $\bar{X}$ を用いた統計量 $\chi^2_{(\bar{X})}$ は自由度 $\nu = n - 1$ の χ^2 分布に従う。
- 自由度 ν の χ^2 分布の 95%信頼区間は得られている。

これにより、$\chi^2_{(\bar{X})}$ を使い、自由度 $\nu = n - 1$ の χ^2 分布の 95%信頼区間を得ることにより『母分散の区間推定』が可能となる。

9.5.1 数値例

正規母集団から抽出した $\{76,\ 85,\ 82,\ 80,\ 77\}$ を使い、$\bar{X}$, s^2, $\chi^2_{(\bar{X})}$, ν ならびに母分散 σ^2 の95%信頼区間を求めなさい。

解法

$$\bar{X} = \frac{76+85+82+80+77}{5} = 80 \tag{74}$$

$$s^2 = \frac{(-4)^2+5^2+2^2+0^2+(-3)^2}{5} = 10.8 \tag{75}$$

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \frac{5\times 10.8}{\sigma^2} = \frac{54}{\sigma^2} \tag{76}$$

$$\nu = 5-1 = 4 \tag{77}$$

従って、$\chi^2_{(\bar{X})}$ は自由度 $\nu = 4$ の χ^2 分布に従う。

表 1 より自由度 $\nu = 4$ の χ^2 分布の 95%信頼区間は

$$0.484 \leqq \frac{54}{\sigma^2} \leqq 11.143 \tag{78}$$

である。従って母分散の 95%信頼区間は

$$4.846 \leqq \sigma^2 \leqq 111.474 \tag{79}$$

である。

この区間推定を『母平均が未知のときの母分散の区間推定』という。

問題 IX$-$**9 $-$ 3**

正規母集団から抽出した $\{76,\ 77,\ 83,\ 84\}$ を使い、$\bar{X}$, s^2, $\chi^2_{(\bar{X})}$, ν ならびに母分散 σ^2 の 95% 信頼区間を求めなさい。

解例 IX−**9 − 3**

$$\bar{X} = \frac{76+77+83+84}{4} = 80$$

$$s^2 = \frac{(-4)^2+(-3)^2+(3)^2+(4)^2}{4} = 12.5$$

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \frac{12.5 \times 4}{\sigma^2} = \frac{50}{\sigma^2}$$

$$\nu = 4 - 1 = 3$$

従って、$\chi^2_{(\bar{X})}$ は自由度 $\nu = 3$ の χ^2 分布に従う。

自由度 $\nu = 3$ の χ^2 分布の 95%信頼区間は

$$0.216 \leqq \frac{50}{\sigma^2} \leqq 9.348$$

である。

従って、母分散の 95%信頼区間は

$$\frac{50}{9.348} \leqq \sigma^2 \leqq \frac{50}{0.216}$$

$$5.349 \leqq \sigma^2 \leqq 231.701$$

である。

9.6 まとめ

- 標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う n 個の独立な確率変数 z_i の平方和

$$\chi^2_{(z)} = \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$$

  は『χ^2 分布』に従う。このとき
- z_i の個数 n を『自由度 ν』という。
- χ^2 分布の確率密度関数の形は自由度 ν によって異なる。
- 確率密度関数の両側に 2.5%を取る $\chi^2_{(z)}$ の値を『臨界値』とよぶ。
- 左右の臨界値に挟まれた区間を『95%信頼区間』という。

- 正規分布 $N(\mu,\ \sigma)$ に従う n 個の独立な確率変数 x_i を標準化した値の平方和

$$\chi^2_{(\mu)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

は自由度 $\nu = n$ の χ^2 分布に従う。

- 正規母集団から抽出された n 個の独立な確率変数 x_i を標本平均 $\bar{X}$ をつかって作られた統計量

$$\chi^2_{(\bar{X})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}$$

は自由度 $\nu = n - 1$ の χ^2 分布に従う。

- 母平均 μ が既知の場合は $\chi^2_{(\mu)}$ を使い、母平均が未知の場合は $\chi^2_{(\bar{X})}$ 使い、『母分散の 95% 信頼区間』を推定する。

9.6.1 参考文献

(1) 「行動科学における統計解析法」芝祐順　南風原朝和　著 『東京大学出版会』1990 年 3 月 20 日　初版

(2) 「完全独習　統計学入門」小島　寛之　著 『ダイヤモンド社』2006 年 9 月 28 日　初版