第 IX 部　統計的検定

8　母平均の区間推定

- 正規母集団
- 標本平均の信頼区間

8.1　はじめに

- 母集団が正規分布ならば標本平均の分布を通じて母集団の特徴を記述することが可能です。
- あくまでも、母集団が正規分布しているならば・・・です。

8.1.1 母集団と標本平均

母集団の分布に関わらず、十分大きなサンプルサイズをとった標本の標本平均は正規分布に従う。

母平均を μ, 母分散を σ^2 とする。
サンプルサイズが n の標本の標本平均 $\bar{X}$ の期待値 $E\left(\bar{X}\right)$ は母平均 μ に一致し、標本平均の分散 $V\left(\bar{X}\right)$ は、$\dfrac{\sigma^2}{n}$ に一致する。

8.1.2 正規母集団

正規分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従う母集団を『正規母集団』という。

正規母集団から抽出されたサンプルサイズ n の標本の『標本平均』は $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

8.1.3 95 %信頼区間

$N(\mu, \sigma^2)$ に従う x の 95% 信頼区間は

$$\mu - 1.96\ \sigma \leqq x \leqq \mu + 1.96\ \sigma \tag{1}$$

である。

観測される x は 95% の確率で (1) の範囲に入ることを意味する。

8.1.4　正規母集団からの標本平均の 95 %信頼区間

$N(\mu, \sigma^2)$ に従う正規母集団からサンプル・サイズ n の標本を抽出したときの標本平均 $\bar{X}$ は $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。$N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う $\bar{X}$ の 95%信頼区間は

$$\mu - 1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \bar{X} \leqq \mu + 1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

である。与式を変形すると、

$$-1.96 \leqq \frac{\bar{X} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \leqq 1.96 \tag{3}$$

を得る。

8.2 標本平均 $\bar{X}$ による母平均 μ の区間推定

母集団が正規分布に従い、母分散が σ^2 であることが既知であるとする。この母集団から、サンプル・サイズ n の標本を抽出すると『標本平均 $\bar{X}$』の分散 $V\left(\bar{X}\right)$ は

$$V\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{4}$$

なので、標準偏差 $D\left(\bar{X}\right)$ は

$$D\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

である。

このとき未知である母平均を μ^* であらわせば、95 %信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{\bar{X}-\mu^*}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \leqq 1.96 \tag{6}$$

とあらわすことができる。

問題 IX$-\mathbf{8}-\mathbf{1}$

以下の不等式を μ^* に関して解け。

(1)　$-1.96 \leqq \dfrac{\bar{X}-\mu^*}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

(2)　$\dfrac{\bar{X}-\mu^*}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \leqq 1.96$

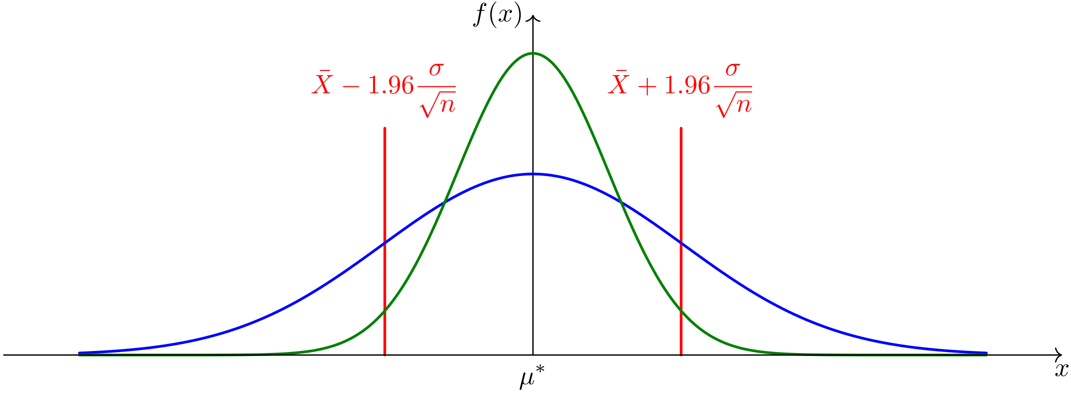
(6) を整理すると、

$$\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu^* \leqq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{7}$$

である。これは、サンプル・サイズ n の標本平均が $\bar{X}$ ならば、母分散が σ^2 の正規母集団の母平均 μ^* は 95% の確率で (7) の区間に含まれることを意味する。

(7) の区間を『母平均 μ の 95%信頼区間』といい、この区間を求めることを、『母平均の区間推定』という。

図 1 $\boldsymbol{\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



8.3　数値例

例題 1

母分散が $\sigma^2 = 100$ である正規母集団から $n = 25$ のサンプルを抽出した[1)]。

　標本平均 $\bar{X}$ が 80 であったとする。母平均 μ を 95%信頼区間で区間推定せよ。

1)　本稿では、特に断りがない場合、無限母集団から復元抽出を行うものとする。

解法

$$\sigma^2 = 100 \tag{8}$$

なので『標本平均』の分散は

$$V\left(\bar{X}\right) = \frac{100}{25} = 4 \tag{9}$$

『標本平均』の標準偏差は

$$D\left(\bar{X}\right) = \sqrt{4} = 2 \tag{10}$$

従って、母平均 μ の 95% 信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{80 - \mu}{2} \leqq 1.96 \tag{11}$$

整理すると

$$80 + -2.92 \leqq \mu \leqq 80 + 3.92 \tag{12}$$

$$76.08 \leqq \mu \leqq 83.92 \tag{13}$$

である。

例題 2

母分散が $\sigma^2 = 100$ である正規母集団から $n = 1$ のサンプルを抽出した。

サンプルの値は 130 であった。母平均 μ を 95%信頼区間で区間推定せよ。

解法

$n = 1$ なので標本平均 $\bar{X} = 130$ である。

$$V\left(\bar{X}\right) = \frac{100}{1} = 100 \tag{14}$$

$$D\left(\bar{X}\right) = \sqrt{100} = 10 \tag{15}$$

なので、μ の 95%信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{130 - \mu}{10} \leqq 1.96 \tag{16}$$

$$110.4 \leqq \mu \leqq 149.6 \tag{17}$$

である。

例題 3

母分散が $\sigma^2 = 100$ である正規母集団から $n = 4$ のサンプルを抽出した。

サンプルの値はそれぞれ

$$131, \quad 135, \quad 140, \quad 138$$

であった。母平均 μ を 95%信頼区間で区間推定せよ。

解法

$$\bar{X} = \frac{131 + 135 + 140 + 138}{4} = 136 \tag{18}$$

$$V\left(\bar{X}\right) = \frac{100}{4} = 25 \tag{19}$$

$$D\left(\bar{X}\right) = \sqrt{25} = 5 \tag{20}$$

なので、なので、μ の 95%信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{136 - \mu}{5} \leqq 1.96 \tag{21}$$

$$126.2 \leqq \mu \leqq 145.8 \tag{22}$$

問題 IX−**8 − 1**

母分散が $\sigma^2 = 100$ である正規母集団から以下のサンプルを抽出した。

$$131, \quad 132, \quad 131, \quad 134, \quad 133, \quad 137, \quad 138, \quad 140, \quad 139$$

母平均 μ を 95%信頼区間で区間推定せよ。

解例 IX−**8 − 1**

$$\bar{X} = \frac{131 + 132 + 131 + 134 + 133 + 137 + 138 + 140 + 139}{9} = 135$$
$$V\left(\bar{X}\right) = \frac{100}{9}$$
$$D\left(\bar{X}\right) = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$$

なので、μ の 95%信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{135 - \mu}{\left(\frac{10}{3}\right)} \leqq 1.96$$
$$128.466 \leqq \mu \leqq 141.533$$

8.4　まとめ

- 母集団の分布に関わらず標本平均は正規分布する。
- 標本平均の期待値は母集団の平均に一致する。
- 母分散が σ^2 であって、サンプル・サイズが n であれば『標本平均 $\bar{X}$』の分散 $V\left(\bar{X}\right)$ は $\dfrac{\sigma^2}{n}$ になる。
- 母集団が正規分布に従うならば、μ の 95%信頼区間は、

$$\bar{X} - 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- サンプル・サイズが n であって、標本平均が $\bar{X}$ ならば、母分散が σ^2 の正規母集団の母平均 μ は 95% の確率で信頼区間に含まれる。

8.4.1　参考文献

(1)　「行動科学における統計解析法」芝祐順　南風原朝和　著 『東京大学出版会』1990 年 3 月 20 日　初版

(2)　「完全独習　統計学入門」小島　寛之　著 『ダイヤモンド社』2006 年 9 月 28 日　初版