

第 IX 部 統計的検定

7 標本平均の分布

- 母平均と母分散
- 標本平均の期待値と分散
- 標本平均の分布
- 母集団と標本平均の関係

- 正規母集団

7.1 はじめに

- 標本平均は正規分布に近づきます。
- 母集団の分布がどのようなものであっても結果は同じになります。
- どうせ同じになるのなら、特別な母集団の分布を仮定します。

7.1.1 母集団

調査対象全体から測定のために要素を取り出すことを『抽出』といい、抽出された集合を『標本』という。取り出す標本の数を『サンプル・サイズ』という。標本が抽出されたとき調査対象全体を『母集団』という。

7.1.2 復元抽出と非復元抽出

- 要素を一つ選び出す度に、その要素を元に戻し次の要素を選び出す抽出法を『復元抽出』という。
- 要素を一つ選び出した後、元に戻さず次の要素を選び出す抽出法を『非復元抽出』という。

7.1.3 確率変数

- 母集団の要素が数値であって、その数値に確率に対応するとき、その値を『確率変数』という。
- ♠, ◇, ♣, ♥ に数字を対応させた場合、その値は確率変数である。
- 赤黒の色札に数字を対応させた場合、その値は確率変数である。
- 数札に数字を対応させた場合、その値は確率変数である。
- 絵札 (A,J,Q,K) に数値を対応させた場合、その値は確率変数である。
 - $A=1, J=11, Q=12, K=13$
 - $A=10, J=10, Q=10, K=10$
- 確率変数は大文字のアルファベットであらわし、それぞれの値は小文字のアルファベットに添え字を付けてあらわす。

7.1.4 期待値

確率変数 X の対応する確率 $\Pr(X = x_i) = p_i$ による加重平均を『期待値』といい $E(X)$ であらわす。

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

7.1.5 確率変数の分散

X を確率変数とする。 x_i と $E(X)$ の差の二乗の期待値を『確率変数の分散』といい、 $V(X)$ であらわす。

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i \quad (2)$$

7.1.6 母平均

母集団における確率変数 X の平均を『母平均』といい μ という記号であらわす。母集団の要素の数が N であって、それぞれの要素を x_i であらわすと、

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \tag{3}$$

である。

7.1.7 母分散

母集団における確率変数 X の分散を『母分散』といい σ^2 という記号であらわす。母集団の要素の数が N であって、それぞれの要素を x_i であらわすと、

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\mu \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{1}{N} N \mu^2 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \quad (6)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu^2 \quad (7)$$

7.2 母集団が一様分布の場合

- ♠ の数札を使い説明する。数札の数字を確率変数 x_i として採用する。♠2 を $x_1 = 2$ とし。♠3 を $x_2 = 3$ とする。以下同様に、♠10 を $x_9 = 10$ とする。
- ここで ♠ の数札を母集団とする。♠ の数札は全部で 9 枚なのでそれぞれのカードの枚数の相対度数は $\frac{1}{9}$ である。
- この 9 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し値を確認し、カードを元に戻す復元抽出を行う。
- ランダム・サンプリングの仮定によれば、十分大きなサイズの標本をとれば、サンプルは母集団の分布を反映する。
- 頻度主義によれば、サンプルにおける相対度数は確率とみなされる。

- 無作為抽出をするということは、それぞれのカードが抽出される抽出されやすさは『同程度に確からしい』。事象の数は9であるのでそれぞれのカードが抽出される確率は $\frac{1}{9}$ と定義することができる。
- 全ての確率変数の出現確率が等しい分布を『一様分布』という。

表1 ♠の数札による母集団

カード	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
枚数	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

問題 IX-7-1

表 1 を母集団とする。母平均 μ と母分散 σ^2 を求めなさい。

解例 IX-7-1

$$\mu = \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{9} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2}{9} - 6^2 = 6.666 \dots$$

7.2.1 $n = 2$ の要素の組み合わせ

抽出回数を n であらわす。表 1 を母集団とすると、 $n = 2$ の復元抽出により抽出される要素の組は $9^2 = 81$ 通りある。 $\{1 \text{ 回目の抽出結果}, 2 \text{ 回目の抽出結果}\}$ と表記し全ての組み合わせを書き出す。

問題 IX-7-2

表 1 を母集団とする。 $n = 2$ の復元抽出を行ったときに抽出される要素の組を全て書き出さない。

表記法は $\{1 \text{ 回目の抽出結果}, 2 \text{ 回目の抽出結果}\}$ とする。

表 2 $n = 2$ の要素の組み合わせ

$\{2, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 5\}$	$\{2, 6\}$	$\{2, 7\}$	$\{2, 8\}$	$\{2, 9\}$	$\{2, 10\}$
$\{3, 2\}$	$\{3, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{3, 5\}$	$\{3, 6\}$	$\{3, 7\}$	$\{3, 8\}$	$\{3, 9\}$	$\{3, 10\}$
$\{4, 2\}$	$\{4, 3\}$	$\{4, 4\}$	$\{4, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 7\}$	$\{4, 8\}$	$\{4, 9\}$	$\{4, 10\}$
$\{5, 2\}$	$\{5, 3\}$	$\{5, 4\}$	$\{5, 5\}$	$\{5, 6\}$	$\{5, 7\}$	$\{5, 8\}$	$\{5, 9\}$	$\{5, 10\}$
$\{6, 2\}$	$\{6, 3\}$	$\{6, 4\}$	$\{6, 5\}$	$\{6, 6\}$	$\{6, 7\}$	$\{6, 8\}$	$\{6, 9\}$	$\{6, 10\}$
$\{7, 2\}$	$\{7, 3\}$	$\{7, 4\}$	$\{7, 5\}$	$\{7, 6\}$	$\{7, 7\}$	$\{7, 8\}$	$\{7, 9\}$	$\{7, 10\}$
$\{8, 2\}$	$\{8, 3\}$	$\{8, 4\}$	$\{8, 5\}$	$\{8, 6\}$	$\{8, 7\}$	$\{8, 8\}$	$\{8, 9\}$	$\{8, 10\}$
$\{9, 2\}$	$\{9, 3\}$	$\{9, 4\}$	$\{9, 5\}$	$\{9, 6\}$	$\{9, 7\}$	$\{9, 8\}$	$\{9, 9\}$	$\{9, 10\}$
$\{10, 2\}$	$\{10, 3\}$	$\{10, 4\}$	$\{10, 5\}$	$\{10, 6\}$	$\{10, 7\}$	$\{10, 8\}$	$\{10, 9\}$	$\{10, 10\}$

7.2.2 $n = 2$ の標本平均

標本 i ごとの平均を『標本平均』といい $\bar{X}_i$ であらわす。

$$\bar{X}_i = \frac{1 \text{ 回目の抽出結果} + 2 \text{ 回目の抽出結果}}{2} \quad (8)$$

標本平均は標本ごとに異なる値をとり、それぞれの値が確率に対応するので確率変数である。

表3 $n = 2$ の $\bar{X}$ の分布

$\bar{X}_i$	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
度数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4	3	2	1
p_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$

問題 IX-7-3

表 3 に基づき、 $\bar{X}$ の期待値 $E(\bar{X})$ を求めなさい。

解例 IX-7-3

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \sum_{i=1}^n x_i p_i \\ &= 2.0 \times \frac{1}{81} + 2.5 \times \frac{2}{81} + 3.0 \times \frac{3}{81} + 3.5 \times \frac{4}{81} + 4.0 \times \frac{5}{81} + 4.5 \times \frac{6}{81} \\ &\quad + 5.0 \times \frac{7}{81} + 5.5 \times \frac{8}{81} + 6.0 \times \frac{9}{81} + 6.5 \times \frac{8}{81} + 7.0 \times \frac{7}{81} + 7.5 \times \frac{6}{81} \\ &\quad + 8.0 \times \frac{5}{81} + 8.5 \times \frac{4}{81} + 9.0 \times \frac{3}{81} + 9.5 \times \frac{2}{81} + 10.0 \times \frac{1}{81} \\ &= 6.0 \end{aligned}$$

7.2.3 標本平均の分散

標本平均 $\bar{X}_i$ の分散を求める。

$$V(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - E(\bar{X}))^2 p_i \quad (9)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\bar{X}_i^2 p_i - 2E(\bar{X}) \bar{X}_i p_i + (E(\bar{X}))^2 p_i \right) \quad (10)$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^2 p_i - 2E(\bar{X}) \sum_{i=1}^n \bar{X}_i p_i + (E(\bar{X}))^2 \sum_{i=1}^n p_i \quad (11)$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^2 p_i - (E(\bar{X}))^2 \quad (12)$$

表4 $n = 2$ の $\bar{X}^2$ の分布

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{X}_i^2$	4.00	6.25	9.00	12.25	16.00	20.25	25.00	30.25	36.00
p_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{9}{81}$
i	10	11	12	13	14	15	16	17	
$\bar{X}_i^2$	42.25	49.00	56.25	64.00	72.25	81.00	90.25	100.00	
p_i	$\frac{8}{81}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$	

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^2) &= 4.00 \times \frac{1}{81} + 6.25 \times \frac{2}{81} + 9.00 \times \frac{3}{81} + 12.25 \times \frac{4}{81} + 16.00 \times \frac{5}{81} + 20.25 \times \frac{6}{81} \\ &\quad + 25.00 \times \frac{7}{81} + 30.25 \times \frac{8}{81} + 36.00 \times \frac{9}{81} + 42.25 \times \frac{8}{81} + 49.00 \times \frac{7}{81} + 56.25 \times \frac{6}{81} \\ &\quad + 64.00 \times \frac{5}{81} + 72.25 \times \frac{4}{81} + 81.00 \times \frac{3}{81} + 90.25 \times \frac{2}{81} + 100.00 \times \frac{1}{81} \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \frac{3186}{81} = 39.333 \dots \quad (14)$$

なので

$$V(\bar{X}) = 39.333 - 6^2 = 3.333 \dots \quad (15)$$

$$D(\bar{X}) = \sqrt{3.333} = 1.825 \dots \quad (16)$$

ここで $\bar{X}_i$ を標準化し、標準化された値を z_i であらわす。

$$z_i = \frac{\bar{X}_i - E(\bar{X})}{D(\bar{X})} = \frac{\bar{X}_i - 6}{1.825} \quad (17)$$

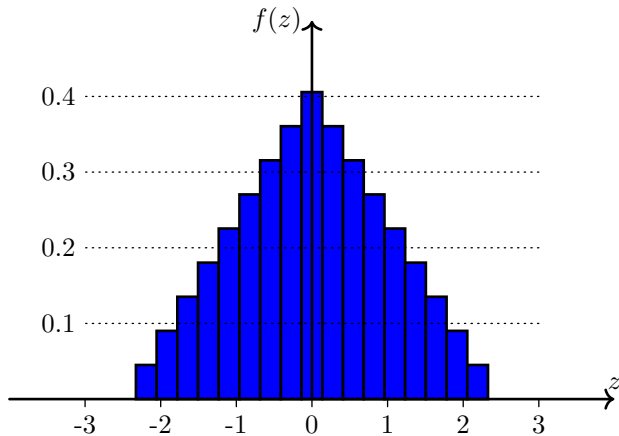
z_i を中心に、

$$z_{i+1} - z_i \quad (18)$$

を幅として、面積を p_i となるように長方形を描画する。このときの高さを $f(z_i)$ とあらわす。

表 5 $n = 2$ の z_i の分布

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i	-2.191	-1.917	-1.643	-1.369	-1.095	-0.822	-0.548	-0.274	0.000
p_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{9}{81}$
$f(z_i)$	0.045	0.090	0.135	0.180	0.225	0.270	0.316	0.361	0.406
i	10	11	12	13	14	15	16	17	
z	0.274	0.548	0.822	1.095	1.369	1.643	1.917	2.191	
p_i	$\frac{8}{81}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$	
$f(z_i)$	0.361	0.316	0.270	0.225	0.180	0.135	0.090	0.045	

図1 $n = 2$ の標準化された標本平均の分布

7.2.4 $n = 3$ の標本平均

同様に、表 1 を母集団とし $n = 3$ の標本を抽出する。抽出される標本の組は $9^3 = 729$ 通りである。 $\{1 \text{ 回目の抽出結果}, 2 \text{ 回目の抽出結果}, 3 \text{ 回目の抽出結果}\}$ と表記し組合せを示す。

表 6 $n = 3$ の要素の組み合わせ 1

$\{2, 2, 2\}$	$\{2, 2, 3\}$	$\{2, 2, 4\}$	$\{2, 2, 5\}$	$\{2, 2, 6\}$	$\{2, 2, 7\}$	$\{2, 2, 8\}$	$\{2, 2, 9\}$	$\{2, 2, 10\}$
$\{2, 3, 2\}$	$\{2, 3, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	$\{2, 3, 5\}$	$\{2, 3, 6\}$	$\{2, 3, 7\}$	$\{2, 3, 8\}$	$\{2, 3, 9\}$	$\{2, 3, 10\}$
$\{2, 4, 2\}$	$\{2, 4, 3\}$	$\{2, 4, 4\}$	$\{2, 4, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$	$\{2, 4, 7\}$	$\{2, 4, 8\}$	$\{2, 4, 9\}$	$\{2, 4, 10\}$
$\{2, 5, 2\}$	$\{2, 5, 3\}$	$\{2, 5, 4\}$	$\{2, 5, 5\}$	$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 5, 7\}$	$\{2, 5, 8\}$	$\{2, 5, 9\}$	$\{2, 5, 10\}$
$\{2, 6, 2\}$	$\{2, 6, 3\}$	$\{2, 6, 4\}$	$\{2, 6, 5\}$	$\{2, 6, 6\}$	$\{2, 6, 7\}$	$\{2, 6, 8\}$	$\{2, 6, 9\}$	$\{2, 6, 10\}$
$\{2, 7, 2\}$	$\{2, 7, 3\}$	$\{2, 7, 4\}$	$\{2, 7, 5\}$	$\{2, 7, 6\}$	$\{2, 7, 7\}$	$\{2, 7, 8\}$	$\{2, 7, 9\}$	$\{2, 7, 10\}$
$\{2, 8, 2\}$	$\{2, 8, 3\}$	$\{2, 8, 4\}$	$\{2, 8, 5\}$	$\{2, 8, 6\}$	$\{2, 8, 7\}$	$\{2, 8, 8\}$	$\{2, 8, 9\}$	$\{2, 8, 10\}$
$\{2, 9, 2\}$	$\{2, 9, 3\}$	$\{2, 9, 4\}$	$\{2, 9, 5\}$	$\{2, 9, 6\}$	$\{2, 9, 7\}$	$\{2, 9, 8\}$	$\{2, 9, 9\}$	$\{2, 9, 10\}$
$\{2, 10, 2\}$	$\{2, 10, 3\}$	$\{2, 10, 4\}$	$\{2, 10, 5\}$	$\{2, 10, 6\}$	$\{2, 10, 7\}$	$\{2, 10, 8\}$	$\{2, 10, 9\}$	$\{2, 10, 10\}$

表 7 $n = 3$ の要素の組み合わせ 2

$\{3, 2, 2\}$	$\{3, 2, 3\}$	$\{3, 2, 4\}$	$\{3, 2, 5\}$	$\{3, 2, 6\}$	$\{3, 2, 7\}$	$\{3, 2, 8\}$	$\{3, 2, 9\}$	$\{3, 2, 10\}$
$\{3, 3, 2\}$	$\{3, 3, 3\}$	$\{3, 3, 4\}$	$\{3, 3, 5\}$	$\{3, 3, 6\}$	$\{3, 3, 7\}$	$\{3, 3, 8\}$	$\{3, 3, 9\}$	$\{3, 3, 10\}$
$\{3, 4, 2\}$	$\{3, 4, 3\}$	$\{3, 4, 4\}$	$\{3, 4, 5\}$	$\{3, 4, 6\}$	$\{3, 4, 7\}$	$\{3, 4, 8\}$	$\{3, 4, 9\}$	$\{3, 4, 10\}$
$\{3, 5, 2\}$	$\{3, 5, 3\}$	$\{3, 5, 4\}$	$\{3, 5, 5\}$	$\{3, 5, 6\}$	$\{3, 5, 7\}$	$\{3, 5, 8\}$	$\{3, 5, 9\}$	$\{3, 5, 10\}$
$\{3, 6, 2\}$	$\{3, 6, 3\}$	$\{3, 6, 4\}$	$\{3, 6, 5\}$	$\{3, 6, 6\}$	$\{3, 6, 7\}$	$\{3, 6, 8\}$	$\{3, 6, 9\}$	$\{3, 6, 10\}$
$\{3, 7, 2\}$	$\{3, 7, 3\}$	$\{3, 7, 4\}$	$\{3, 7, 5\}$	$\{3, 7, 6\}$	$\{3, 7, 7\}$	$\{3, 7, 8\}$	$\{3, 7, 9\}$	$\{3, 7, 10\}$
$\{3, 8, 2\}$	$\{3, 8, 3\}$	$\{3, 8, 4\}$	$\{3, 8, 5\}$	$\{3, 8, 6\}$	$\{3, 8, 7\}$	$\{3, 8, 8\}$	$\{3, 8, 9\}$	$\{3, 8, 10\}$
$\{3, 9, 2\}$	$\{3, 9, 3\}$	$\{3, 9, 4\}$	$\{3, 9, 5\}$	$\{3, 9, 6\}$	$\{3, 9, 7\}$	$\{3, 9, 8\}$	$\{3, 9, 9\}$	$\{3, 9, 10\}$
$\{3, 10, 2\}$	$\{3, 10, 3\}$	$\{3, 10, 4\}$	$\{3, 10, 5\}$	$\{3, 10, 6\}$	$\{3, 10, 7\}$	$\{3, 10, 8\}$	$\{3, 10, 9\}$	$\{3, 10, 10\}$

表 8 $n = 3$ の要素の組み合わせ 3

{4, 2, 2}	{4, 2, 3}	{4, 2, 4}	{4, 2, 5}	{4, 2, 6}	{4, 2, 7}	{4, 2, 8}	{4, 2, 9}	{4, 2, 10}
{4, 3, 2}	{4, 3, 3}	{4, 3, 4}	{4, 3, 5}	{4, 3, 6}	{4, 3, 7}	{4, 3, 8}	{4, 3, 9}	{4, 3, 10}
{4, 4, 2}	{4, 4, 3}	{4, 4, 4}	{4, 4, 5}	{4, 4, 6}	{4, 4, 7}	{4, 4, 8}	{4, 4, 9}	{4, 4, 10}
{4, 5, 2}	{4, 5, 3}	{4, 5, 4}	{4, 5, 5}	{4, 5, 6}	{4, 5, 7}	{4, 5, 8}	{4, 5, 9}	{4, 5, 10}
{4, 6, 2}	{4, 6, 3}	{4, 6, 4}	{4, 6, 5}	{4, 6, 6}	{4, 6, 7}	{4, 6, 8}	{4, 6, 9}	{4, 6, 10}
{4, 7, 2}	{4, 7, 3}	{4, 7, 4}	{4, 7, 5}	{4, 7, 6}	{4, 7, 7}	{4, 7, 8}	{4, 7, 9}	{4, 7, 10}
{4, 8, 2}	{4, 8, 3}	{4, 8, 4}	{4, 8, 5}	{4, 8, 6}	{4, 8, 7}	{4, 8, 8}	{4, 8, 9}	{4, 8, 10}
{4, 9, 2}	{4, 9, 3}	{4, 9, 4}	{4, 9, 5}	{4, 9, 6}	{4, 9, 7}	{4, 9, 8}	{4, 9, 9}	{4, 9, 10}
{4, 10, 2}	{4, 10, 3}	{4, 10, 4}	{4, 10, 5}	{4, 10, 6}	{4, 10, 7}	{4, 10, 8}	{4, 10, 9}	{4, 10, 10}

表9 $n = 3$ の要素の組み合わせ 4

{5, 2, 2}	{5, 2, 3}	{5, 2, 4}	{5, 2, 5}	{5, 2, 6}	{5, 2, 7}	{5, 2, 8}	{5, 2, 9}	{5, 2, 10}
{5, 3, 2}	{5, 3, 3}	{5, 3, 4}	{5, 3, 5}	{5, 3, 6}	{5, 3, 7}	{5, 3, 8}	{5, 3, 9}	{5, 3, 10}
{5, 4, 2}	{5, 4, 3}	{5, 4, 4}	{5, 4, 5}	{5, 4, 6}	{5, 4, 7}	{5, 4, 8}	{5, 4, 9}	{5, 4, 10}
{5, 5, 2}	{5, 5, 3}	{5, 5, 4}	{5, 5, 5}	{5, 5, 6}	{5, 5, 7}	{5, 5, 8}	{5, 5, 9}	{5, 5, 10}
{5, 6, 2}	{5, 6, 3}	{5, 6, 4}	{5, 6, 5}	{5, 6, 6}	{5, 6, 7}	{5, 6, 8}	{5, 6, 9}	{5, 6, 10}
{5, 7, 2}	{5, 7, 3}	{5, 7, 4}	{5, 7, 5}	{5, 7, 6}	{5, 7, 7}	{5, 7, 8}	{5, 7, 9}	{5, 7, 10}
{5, 8, 2}	{5, 8, 3}	{5, 8, 4}	{5, 8, 5}	{5, 8, 6}	{5, 8, 7}	{5, 8, 8}	{5, 8, 9}	{5, 8, 10}
{5, 9, 2}	{5, 9, 3}	{5, 9, 4}	{5, 9, 5}	{5, 9, 6}	{5, 9, 7}	{5, 9, 8}	{5, 9, 9}	{5, 9, 10}
{5, 10, 2}	{5, 10, 3}	{5, 10, 4}	{5, 10, 5}	{5, 10, 6}	{5, 10, 7}	{5, 10, 8}	{5, 10, 9}	{5, 10, 10}

表 10 $n = 3$ の要素の組み合わせ 5

{6, 2, 2}	{6, 2, 3}	{6, 2, 4}	{6, 2, 5}	{6, 2, 6}	{6, 2, 7}	{6, 2, 8}	{6, 2, 9}	{6, 2, 10}
{6, 3, 2}	{6, 3, 3}	{6, 3, 4}	{6, 3, 5}	{6, 3, 6}	{6, 3, 7}	{6, 3, 8}	{6, 3, 9}	{6, 3, 10}
{6, 4, 2}	{6, 4, 3}	{6, 4, 4}	{6, 4, 5}	{6, 4, 6}	{6, 4, 7}	{6, 4, 8}	{6, 4, 9}	{6, 4, 10}
{6, 5, 2}	{6, 5, 3}	{6, 5, 4}	{6, 5, 5}	{6, 5, 6}	{6, 5, 7}	{6, 5, 8}	{6, 5, 9}	{6, 5, 10}
{6, 6, 2}	{6, 6, 3}	{6, 6, 4}	{6, 6, 5}	{6, 6, 6}	{6, 6, 7}	{6, 6, 8}	{6, 6, 9}	{6, 6, 10}
{6, 7, 2}	{6, 7, 3}	{6, 7, 4}	{6, 7, 5}	{6, 7, 6}	{6, 7, 7}	{6, 7, 8}	{6, 7, 9}	{6, 7, 10}
{6, 8, 2}	{6, 8, 3}	{6, 8, 4}	{6, 8, 5}	{6, 8, 6}	{6, 8, 7}	{6, 8, 8}	{6, 8, 9}	{6, 8, 10}
{6, 9, 2}	{6, 9, 3}	{6, 9, 4}	{6, 9, 5}	{6, 9, 6}	{6, 9, 7}	{6, 9, 8}	{6, 9, 9}	{6, 9, 10}
{6, 10, 2}	{6, 10, 3}	{6, 10, 4}	{6, 10, 5}	{6, 10, 6}	{6, 10, 7}	{6, 10, 8}	{6, 10, 9}	{6, 10, 10}

表 11 $n = 3$ の要素の組み合わせ 6

$\{7, 2, 2\}$	$\{7, 2, 3\}$	$\{7, 2, 4\}$	$\{7, 2, 5\}$	$\{7, 2, 6\}$	$\{7, 2, 7\}$	$\{7, 2, 8\}$	$\{7, 2, 9\}$	$\{7, 2, 10\}$
$\{7, 3, 2\}$	$\{7, 3, 3\}$	$\{7, 3, 4\}$	$\{7, 3, 5\}$	$\{7, 3, 6\}$	$\{7, 3, 7\}$	$\{7, 3, 8\}$	$\{7, 3, 9\}$	$\{7, 3, 10\}$
$\{7, 4, 2\}$	$\{7, 4, 3\}$	$\{7, 4, 4\}$	$\{7, 4, 5\}$	$\{7, 4, 6\}$	$\{7, 4, 7\}$	$\{7, 4, 8\}$	$\{7, 4, 9\}$	$\{7, 4, 10\}$
$\{7, 5, 2\}$	$\{7, 5, 3\}$	$\{7, 5, 4\}$	$\{7, 5, 5\}$	$\{7, 5, 6\}$	$\{7, 5, 7\}$	$\{7, 5, 8\}$	$\{7, 5, 9\}$	$\{7, 5, 10\}$
$\{7, 6, 2\}$	$\{7, 6, 3\}$	$\{7, 6, 4\}$	$\{7, 6, 5\}$	$\{7, 6, 6\}$	$\{7, 6, 7\}$	$\{7, 6, 8\}$	$\{7, 6, 9\}$	$\{7, 6, 10\}$
$\{7, 7, 2\}$	$\{7, 7, 3\}$	$\{7, 7, 4\}$	$\{7, 7, 5\}$	$\{7, 7, 6\}$	$\{7, 7, 7\}$	$\{7, 7, 8\}$	$\{7, 7, 9\}$	$\{7, 7, 10\}$
$\{7, 8, 2\}$	$\{7, 8, 3\}$	$\{7, 8, 4\}$	$\{7, 8, 5\}$	$\{7, 8, 6\}$	$\{7, 8, 7\}$	$\{7, 8, 8\}$	$\{7, 8, 9\}$	$\{7, 8, 10\}$
$\{7, 9, 2\}$	$\{7, 9, 3\}$	$\{7, 9, 4\}$	$\{7, 9, 5\}$	$\{7, 9, 6\}$	$\{7, 9, 7\}$	$\{7, 9, 8\}$	$\{7, 9, 9\}$	$\{7, 9, 10\}$
$\{7, 10, 2\}$	$\{7, 10, 3\}$	$\{7, 10, 4\}$	$\{7, 10, 5\}$	$\{7, 10, 6\}$	$\{7, 10, 7\}$	$\{7, 10, 8\}$	$\{7, 10, 9\}$	$\{7, 10, 10\}$

表 12 $n = 3$ の要素の組み合わせ 7

{8, 2, 2}	{8, 2, 3}	{8, 2, 4}	{8, 2, 5}	{8, 2, 6}	{8, 2, 7}	{8, 2, 8}	{8, 2, 9}	{8, 2, 10}
{8, 3, 2}	{8, 3, 3}	{8, 3, 4}	{8, 3, 5}	{8, 3, 6}	{8, 3, 7}	{8, 3, 8}	{8, 3, 9}	{8, 3, 10}
{8, 4, 2}	{8, 4, 3}	{8, 4, 4}	{8, 4, 5}	{8, 4, 6}	{8, 4, 7}	{8, 4, 8}	{8, 4, 9}	{8, 4, 10}
{8, 5, 2}	{8, 5, 3}	{8, 5, 4}	{8, 5, 5}	{8, 5, 6}	{8, 5, 7}	{8, 5, 8}	{8, 5, 9}	{8, 5, 10}
{8, 6, 2}	{8, 6, 3}	{8, 6, 4}	{8, 6, 5}	{8, 6, 6}	{8, 6, 7}	{8, 6, 8}	{8, 6, 9}	{8, 6, 10}
{8, 7, 2}	{8, 7, 3}	{8, 7, 4}	{8, 7, 5}	{8, 7, 6}	{8, 7, 7}	{8, 7, 8}	{8, 7, 9}	{8, 7, 10}
{8, 8, 2}	{8, 8, 3}	{8, 8, 4}	{8, 8, 5}	{8, 8, 6}	{8, 8, 7}	{8, 8, 8}	{8, 8, 9}	{8, 8, 10}
{8, 9, 2}	{8, 9, 3}	{8, 9, 4}	{8, 9, 5}	{8, 9, 6}	{8, 9, 7}	{8, 9, 8}	{8, 9, 9}	{8, 9, 10}
{8, 10, 2}	{8, 10, 3}	{8, 10, 4}	{8, 10, 5}	{8, 10, 6}	{8, 10, 7}	{8, 10, 8}	{8, 10, 9}	{8, 10, 10}

表 13 $n = 3$ の要素の組み合わせ 8

{9, 2, 2}	{9, 2, 3}	{9, 2, 4}	{9, 2, 5}	{9, 2, 6}	{9, 2, 7}	{9, 2, 8}	{9, 2, 9}	{9, 2, 10}
{9, 3, 2}	{9, 3, 3}	{9, 3, 4}	{9, 3, 5}	{9, 3, 6}	{9, 3, 7}	{9, 3, 8}	{9, 3, 9}	{9, 3, 10}
{9, 4, 2}	{9, 4, 3}	{9, 4, 4}	{9, 4, 5}	{9, 4, 6}	{9, 4, 7}	{9, 4, 8}	{9, 4, 9}	{9, 4, 10}
{9, 5, 2}	{9, 5, 3}	{9, 5, 4}	{9, 5, 5}	{9, 5, 6}	{9, 5, 7}	{9, 5, 8}	{9, 5, 9}	{9, 5, 10}
{9, 6, 2}	{9, 6, 3}	{9, 6, 4}	{9, 6, 5}	{9, 6, 6}	{9, 6, 7}	{9, 6, 8}	{9, 6, 9}	{9, 6, 10}
{9, 7, 2}	{9, 7, 3}	{9, 7, 4}	{9, 7, 5}	{9, 7, 6}	{9, 7, 7}	{9, 7, 8}	{9, 7, 9}	{9, 7, 10}
{9, 8, 2}	{9, 8, 3}	{9, 8, 4}	{9, 8, 5}	{9, 8, 6}	{9, 8, 7}	{9, 8, 8}	{9, 8, 9}	{9, 8, 10}
{9, 9, 2}	{9, 9, 3}	{9, 9, 4}	{9, 9, 5}	{9, 9, 6}	{9, 9, 7}	{9, 9, 8}	{9, 9, 9}	{9, 9, 10}
{9, 10, 2}	{9, 10, 3}	{9, 10, 4}	{9, 10, 5}	{9, 10, 6}	{9, 10, 7}	{9, 10, 8}	{9, 10, 9}	{9, 10, 10}

表 14 $n = 3$ の要素の組み合わせ 9

$\{10, 2, 2\}$	$\{10, 2, 3\}$	$\{10, 2, 4\}$	$\{10, 2, 5\}$	$\{10, 2, 6\}$	$\{10, 2, 7\}$	$\{10, 2, 8\}$	$\{10, 2, 9\}$	$\{10, 2, 10\}$
$\{10, 3, 2\}$	$\{10, 3, 3\}$	$\{10, 3, 4\}$	$\{10, 3, 5\}$	$\{10, 3, 6\}$	$\{10, 3, 7\}$	$\{10, 3, 8\}$	$\{10, 3, 9\}$	$\{10, 3, 10\}$
$\{10, 4, 2\}$	$\{10, 4, 3\}$	$\{10, 4, 4\}$	$\{10, 4, 5\}$	$\{10, 4, 6\}$	$\{10, 4, 7\}$	$\{10, 4, 8\}$	$\{10, 4, 9\}$	$\{10, 4, 10\}$
$\{10, 5, 2\}$	$\{10, 5, 3\}$	$\{10, 5, 4\}$	$\{10, 5, 5\}$	$\{10, 5, 6\}$	$\{10, 5, 7\}$	$\{10, 5, 8\}$	$\{10, 5, 9\}$	$\{10, 5, 10\}$
$\{10, 6, 2\}$	$\{10, 6, 3\}$	$\{10, 6, 4\}$	$\{10, 6, 5\}$	$\{10, 6, 6\}$	$\{10, 6, 7\}$	$\{10, 6, 8\}$	$\{10, 6, 9\}$	$\{10, 6, 10\}$
$\{10, 7, 2\}$	$\{10, 7, 3\}$	$\{10, 7, 4\}$	$\{10, 7, 5\}$	$\{10, 7, 6\}$	$\{10, 7, 7\}$	$\{10, 7, 8\}$	$\{10, 7, 9\}$	$\{10, 7, 10\}$
$\{10, 8, 2\}$	$\{10, 8, 3\}$	$\{10, 8, 4\}$	$\{10, 8, 5\}$	$\{10, 8, 6\}$	$\{10, 8, 7\}$	$\{10, 8, 8\}$	$\{10, 8, 9\}$	$\{10, 8, 10\}$
$\{10, 9, 2\}$	$\{10, 9, 3\}$	$\{10, 9, 4\}$	$\{10, 9, 5\}$	$\{10, 9, 6\}$	$\{10, 9, 7\}$	$\{10, 9, 8\}$	$\{10, 9, 9\}$	$\{10, 9, 10\}$
$\{10, 10, 2\}$	$\{10, 10, 3\}$	$\{10, 10, 4\}$	$\{10, 10, 5\}$	$\{10, 10, 6\}$	$\{10, 10, 7\}$	$\{10, 10, 8\}$	$\{10, 10, 9\}$	$\{10, 10, 10\}$

7.2.5 $n = 3$ の標本平均

$n = 3$ の標本平均は

$$\bar{X}_i = \frac{1 \text{ 回目の抽出結果} + 2 \text{ 回目の抽出結果} + 3 \text{ 回目の抽出結果}}{3} \quad (19)$$

であって、期待値, 分散, 標準偏差は

$$E(\bar{X}) = 6 \quad (20)$$

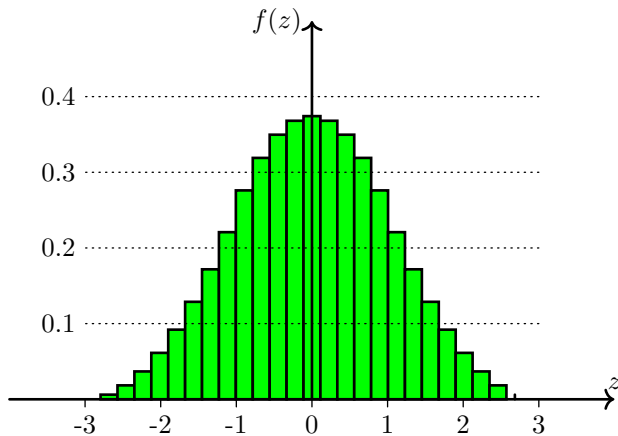
$$V(\bar{X}) = 2.222 \dots \quad (21)$$

$$D(\bar{X}) = 1.490 \dots \quad (22)$$

である。これらを使い $\bar{X}_i$ を標準化し、上記の方法と同様の方法で図示する。

表 15 $n = 3$ の $\bar{X}_i$ の分布

$\bar{X}_i$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{18}{3}$
p_i	$\frac{1}{729}$	$\frac{3}{729}$	$\frac{6}{729}$	$\frac{10}{729}$	$\frac{15}{729}$	$\frac{21}{729}$	$\frac{28}{729}$	$\frac{36}{729}$	$\frac{45}{729}$	$\frac{52}{729}$	$\frac{57}{729}$	$\frac{60}{729}$	$\frac{61}{729}$
$\bar{X}_i$	$\frac{19}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{21}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{23}{3}$	$\frac{24}{3}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{26}{3}$	$\frac{27}{3}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{29}{3}$	$\frac{30}{3}$	
p_i	$\frac{60}{729}$	$\frac{57}{729}$	$\frac{52}{729}$	$\frac{45}{729}$	$\frac{36}{729}$	$\frac{28}{729}$	$\frac{21}{729}$	$\frac{15}{729}$	$\frac{10}{729}$	$\frac{6}{729}$	$\frac{3}{729}$	$\frac{1}{729}$	

図2 $n = 3$ の標準化された $\bar{X}$ の分布

7.2.6 母集団と標本平均の関係

表 16 母集団と標本平均の統計量

母集団	μ	σ^2	σ
♠2 ~ ♠10	6	6.666	2.581...
$\bar{X}$	$E(\bar{X})$	$V(\bar{X})$	$D(\bar{X})$
$n = 2$	6	3.333	1.825...
$n = 3$	6	2.222	1.490...

7.3 母集団が二項分布の場合

♠ の数札を 2 枚使い母集団とする。ここでは ♠2 と ♠10 とする。

表 17 2 枚の数札による母集団

カード	♠2	♠10
x_i	2	10
枚数	1	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

問題 IX-7-3

表 17 を母集団とする。

母平均と母分散を求めなさい。

解例 IX-7-3

$$\mu = \frac{2 + 10}{2} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{2^2 + 10^2}{2} - 6^2 = 16$$

7.3.1 標本平均の値

表 17 の母集団から復元抽出を行うことを考える。

標本 i において j 回目の抽出された値を x_{ij} とあらわす。 $n = 2$ の i における標本平均 $\bar{X}_i$ は、

$$\bar{X}_i = \frac{x_{i1} + x_{i2}}{2} \quad (23)$$

なので、 $\bar{X}_i$ は、2,6,10 をとる。

同様に

$n = 4$ ならば、 $\bar{X}_i$ は、2,4,6,8,10 をとる。

$n = 6$ ならば、 $\bar{X}_i$ は、2, 3.333, 4.666, 6, 7.333, 8.666, 10 をとる。

$n = 8$ ならば、 $\bar{X}_i$ は、2,3,4,5,6,7,8,9,10 をとる。

$n = 10$ ならば、 $\bar{X}_i$ は、2.0, 2.8, 3.6, 4.4, 5.2, 6.0, 6.8, 7.6, 8.4, 9.2, 10.0 をとる。

7.3.2 標本平均の出現確率

『♠2 が抽出される』確率を p とし、『♠10 が抽出される』確率を q とすると、

$$q = 1 - p \quad (24)$$

であり、 q は『♠2 が抽出されない』確率である。 n 回の復元抽出を行ったときの分布は、『確率 $p = 0.5$ に対する次数 n の二項分布』 $B(n, 0.5)$ に従う。

♠2 が抽出される確率を $p = 0.5$ 、♠2 が抽出される回数を X とすると、 n 回の抽出で ♠2 が x 回抽出される確率は、

$$\Pr(X = x) = {}_n C_x 0.5^x 0.5^{n-x} \quad ; x = 0, 1, \dots, n \quad (25)$$

である。

母集団と標本の統計量を求める。

表 18 母集団と標本平均の統計量

母集団	μ	σ^2	σ
♠2 ♠10	6	16	4
標本平均	$E(\bar{X})$	$V(\bar{X})$	$D(\bar{X})$
$n = 2$	6	8.0	$\sqrt{8}$
$n = 4$	6	4.0	2
$n = 8$	6	2.0	$\sqrt{2}$
$n = 10$	6	1.6	$\sqrt{1.6}$

抽出される回数 x_i を標準化した値を z_i とする。抽出回数 n ごとに z_i の分布を示す。

表 19 標準化された $B(2, 0.5)$ の分布

$\bar{X}_i$	z_i	p_i	$f(z_i)$
2	-1.414	0.250	0.177
6	0.000	0.500	0.354
10	1.414	0.250	0.177

表 20 標準化された $B(4, 0.5)$ の分布

$\bar{X}_i$	z_i	p_i	$f(z_i)$
2	-2.000	0.063	0.063
4	-1.000	0.250	0.250
6	0.000	0.375	0.375
8	1.000	0.250	0.250
10	2.000	0.063	0.063

表 21 標準化された $B(6, 0.5)$ の分布

$\bar{X}_i$	z_i	p_i	$f(z_i)$
2.000	-2.449	0.016	0.019
3.333	-1.633	0.094	0.115
4.667	-0.816	0.234	0.287
6.000	0.000	0.313	0.383
7.333	0.816	0.234	0.287
8.667	1.633	0.094	0.115
10.000	2.449	0.016	0.019

表 22 標準化された $B(8, 0.5)$ の分布

$\bar{X}_i$	z_i	p_i	$f(z_i)$
2	-2.828	0.004	0.006
3	-2.121	0.031	0.044
4	-1.414	0.109	0.155
5	-0.707	0.219	0.309
6	0.000	0.273	0.387
7	0.707	0.219	0.309
8	1.414	0.109	0.155
9	2.121	0.031	0.044
10	2.828	0.004	0.006

表 23 標準化された $B(10, 0.5)$ の分布

$\bar{X}_i$	z_i	p_i	$f(z_i)$
2.0	-3.162	0.001	0.002
2.8	-2.530	0.010	0.015
3.6	-1.897	0.044	0.069
4.4	-1.265	0.117	0.185
5.2	-0.632	0.205	0.324
6.0	0.000	0.246	0.389
6.8	0.632	0.205	0.324
7.6	1.265	0.117	0.185
8.4	1.897	0.044	0.069
9.2	2.530	0.010	0.015
10.0	3.162	0.001	0.002

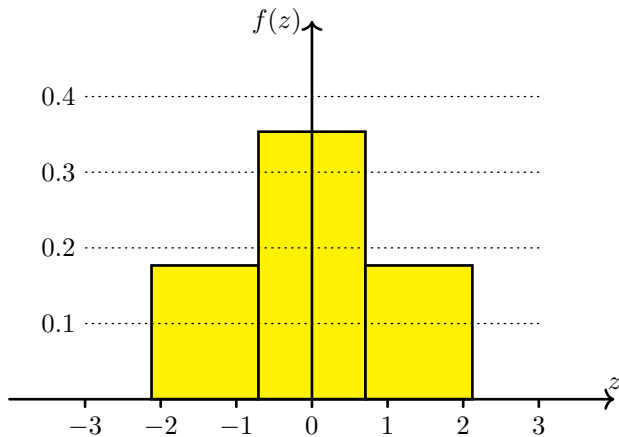
図3 標準化された $B(2, 0.5)$ の分布

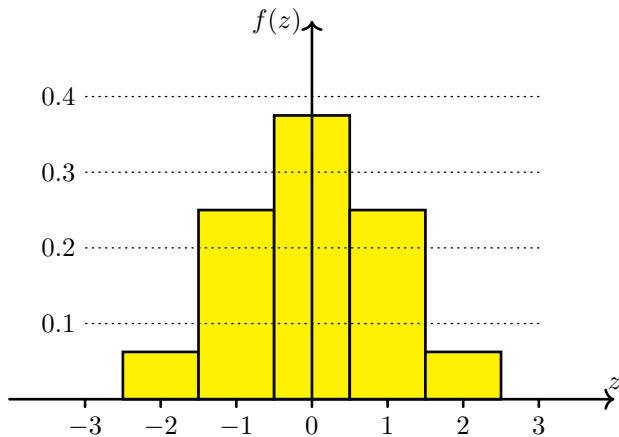
図4 標準化された $B(4, 0.5)$ の分布

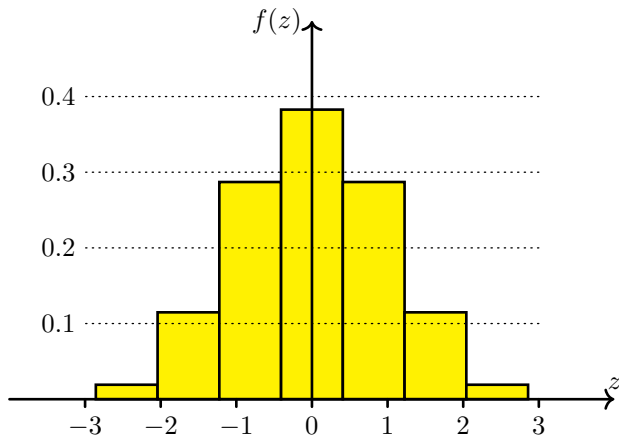
図5 標準化された $B(6, 0.5)$ の分布

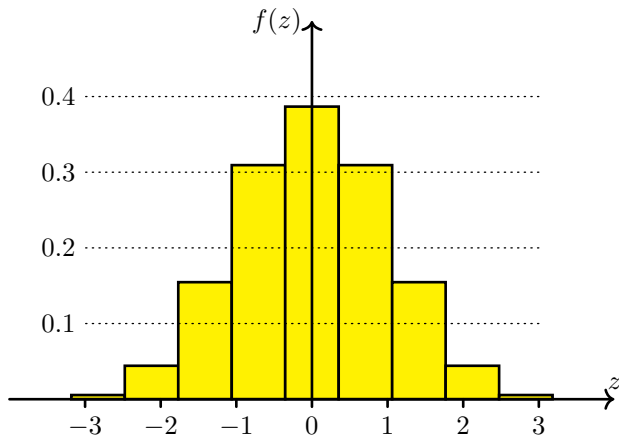
図6 標準化された $B(8, 0.5)$ の分布

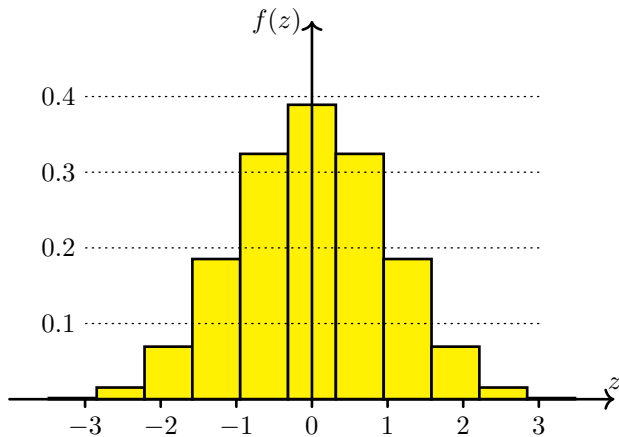
図7 標準化された $B(10, 0.5)$ の分布

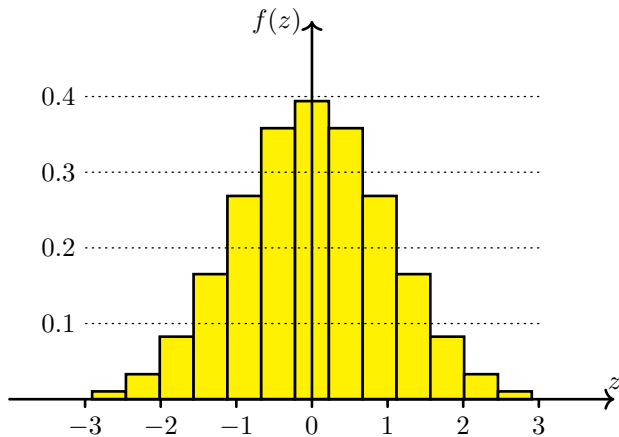
図8 標準化された $B(20, 0.5)$ の分布

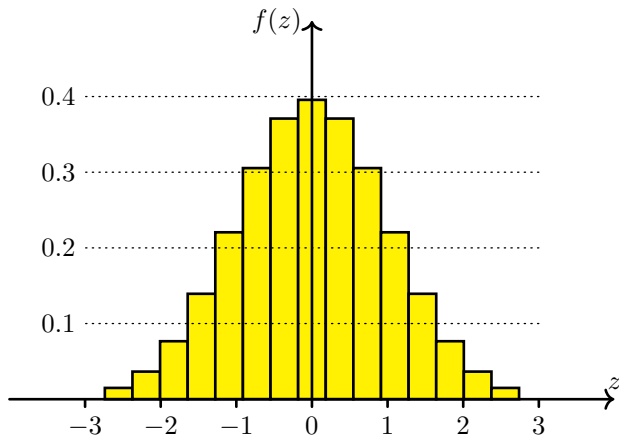
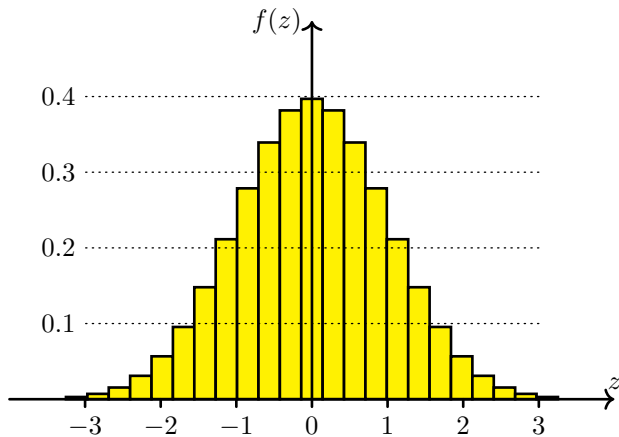
図9 標準化された $B(30, 0.5)$ の分布

図 10 標準化された $B(50, 0.5)$ の分布

7.4 母集団と標本平均 $\bar{X}$ の関係

7.4.1 母集団と標本平均 $\bar{X}$ の統計量

一様分布の例と二項分布の例において、以下の傾向が確認できる。

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (26)$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (27)$$

この傾向は、他の分布、サンプル・サイズでも確認できることが知られている。

7.4.2 標本平均 $\bar{X}$ の分布

- サンプル・サイズ n が十分に大きいとき標本平均は、母平均を中心とする釣り鐘型の分布をすると考えられる。
- サンプル・サイズ n が大きくなるほどこの傾向は強まる。この性質を『大数の法則』という。
- 母集団の分布がどのようなものであっても n が十分に大きいとき、標本平均が正規分布に従うことは『中心極限定理』で示されている。

7.4.3 正規母集団

- 正規分布に従う母集団を『正規母集団』という。
- 正規母集団ならば、母集団と標本平均の分布は正規分布である。
- 正規母集団の母平均を μ , 母分散を σ^2 とする。
- この母集団からサンプル・サイズ n の標本を復元抽出すると、標本平均 $\bar{X}$ の期待値 $E(\bar{X})$ は μ に一致し、分散 $V(\bar{X})$ は $\frac{\sigma^2}{n}$ になる。

7.5 まとめ

- 母集団の分布がどのようなものであっても、十分大きなサイズのサンプリングを行えば、標本平均は正規分布に従う。
- 中心極限定理によって示されているが、定理の主張を紹介したのみである。
- 一様分布、二項分布で傾向は確認した。
- 正規分布に従う母集団を『正規母集団』という。
- $N(\mu, \sigma^2)$ に従う正規母集団からサンプル・サイズ n の標本を抽出すると、標本平均 $\bar{X}$ は $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

7.5.1 参考文献

- (1) 「行動科学における統計解析法」 芝祐順 南風原朝和 著 『東京大学出版会』 1990 年 3 月 20 日 初版
- (2) 「完全独習 統計学入門」 小島 寛之 著 『ダイヤモンド社』 2006 年 9 月 28 日 初版