

第 IX 部 統計的検定

5 仮説検定

- 95% 信頼区間
- 仮説の棄却
- 区間推定

5.1 はじめに

- コインを投げたとき、裏が 10 回出たことが分かっています。
- コインは何回投げたのでしょうか？
- 何回ぐらい投げれば、裏は 10 回出るのでしょうか？

5.2 二項分布

定義

ある試行において事象 E の起こる確率を $\Pr(E) = p$ 、その補事象の確率を $\Pr(E^C) = q$ とする。この試行を独立に n 回繰り返すとき、事象 E の起こる回数を X とすれば X の確率分布は

$$\Pr(X = x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} \quad (1)$$

である。この確率分布を確率 p に対する次数 n の二項分布といい、 $B(n, p)$ という記号であらわす。

5.2.1 二項分布の期待値と分散

定理 IX-2-1

$B(n, p)$ に従う確率変数 X の期待値, 分散, 標準偏差は以下の公式で与えられる。ここで $q = 1 - p$ とする。

$$E(X) = np \quad (2)$$

$$V(X) = npq \quad (3)$$

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq} \quad (4)$$

問題 IX-5 - 1

次の二項分布の期待値と分散並びに標準偏差を求めなさい。

(1) $B(64, 0.5)$

(2) $B(100, 0.5)$

解例 IX-5 - 1

(1)

$$E(X) = 64 \times 0.5 = 32$$

$$V(X) = 64 \times 0.5 \times 0.5 = 16$$

$$D(X) = \sqrt{16} = 4$$

(2)

$$E(X) = 100 \times 0.5 = 50$$

$$V(X) = 100 \times 0.5 \times 0.5 = 25$$

$$D(X) = \sqrt{25} = 5$$

5.2.2 標準正規分布

定義

確率密度関数に正規曲線

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \quad (5)$$

を持つ確率分布を『標準正規分布』といい

$$N(0, 1) \quad (6)$$

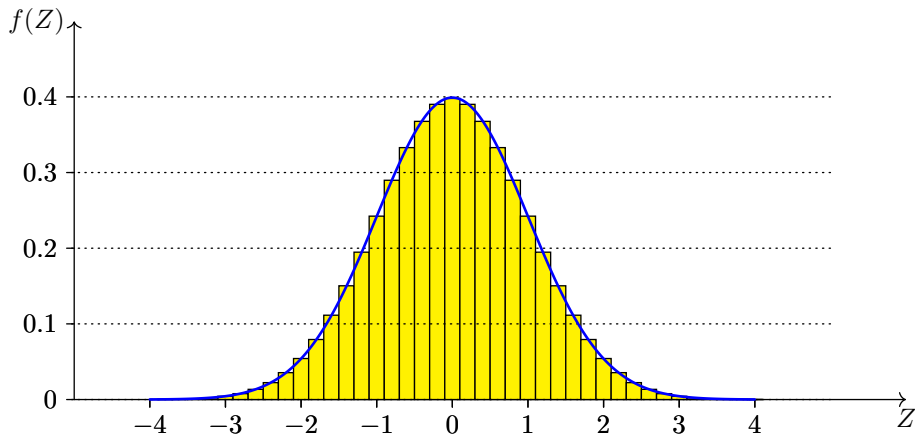
という記号であらわす。標準正規分布の平均は 0、標準偏差は 1 である。

5.2.3 二項分布による標準正規分布の近似

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、確率変数を標準化した確率変数 Z

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad (7)$$

は n を十分に大きくすると標準正規分布に近づくことが知られている。

図1 標準化した $B(100, 0.5)$ の分布と正規曲線

5.3 二項分布の標準化

確率変数 X が $B(3, 0.5)$ に従うときの Z をあらわす。

$$E(X) = 3 \times 0.5 = 1.5 \quad (8)$$

$$V(X) = 3 \times 0.5 \times 0.5 = 0.75 \quad (9)$$

$$D(X) = \sqrt{0.75} = 0.866025404 \dots \quad (10)$$

なので

$$Z = \frac{X - 1.5}{0.866025404 \dots} \quad (11)$$

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3\} \quad (12)$$

なので対応する Z 値は表 1 の通り。

表 1 $B(3, 0.5)$ の Z 値

X	Z
0	-1.732051
1	-0.577350
2	0.577350
3	1.732051

同様に確率変数 X が $B(4, 0.5)$ に従うときの Z をあらわす。

$$E(X) = 4 \times 0.5 = 2 \quad (13)$$

$$V(X) = 4 \times 0.5 \times 0.5 = 1 \quad (14)$$

$$D(X) = \sqrt{1} = 1 \quad (15)$$

$$Z = \frac{X - 2}{1} = X - 2 \quad (16)$$

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (17)$$

表2 $B(4, 0.5)$ の Z 値

X	Z
0	-2.000000
1	-1.000000
2	0.000000
3	1.000000
4	2.000000

確率変数 X が $B(5, 0.5)$ に従うときの Z をあらわす。

$$E(X) = 5 \times 0.5 = 2.5 \quad (18)$$

$$V(X) = 5 \times 0.5 \times 0.5 = 1.25 \quad (19)$$

$$D(X) = \sqrt{1.25} = 1.118033989 \dots \quad (20)$$

$$Z = \frac{X - 2.5}{1.118033989 \dots} \quad (21)$$

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad (22)$$

表3 $B(5, 0.5)$ の Z 値

X	Z
0	-2.236068
1	-1.341641
2	-0.447214
3	0.447214
4	1.341641
5	2.236068

確率変数 X が $B(6, 0.5)$ に従うときの Z をあらわす。

$$E(X) = 6 \times 0.5 = 3.0 \quad (23)$$

$$V(X) = 6 \times 0.5 \times 0.5 = 1.5 \quad (24)$$

$$D(X) = \sqrt{1.5} = 1.224744871 \dots \quad (25)$$

$$Z = \frac{X - 3.0}{1.224744871 \dots} \quad (26)$$

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (27)$$

表4 $B(6, 0.5)$ の Z 値

X	Z
0	-2.449490
1	-1.632993
2	-0.816497
3	0.000000
4	0.816497
5	1.632993
6	2.449490

問題 IX-5-2

確率変数 X が $B(7, 0.5)$ に従うときの Z 値を求めなさい。

表5 $B(7, 0.5)$ の Z 値

X	Z
0	-2.645751
1	-1.889822
2	-1.133893
3	-0.377964
4	0.377964
5	1.133893
6	1.889822
7	2.645751

表6 $B(8, 0.5)$ の Z 値

X	Z
0	-2.828427
1	-2.121320
2	-1.414214
3	-0.707107
4	0.000000
5	0.707107
6	1.414214
7	2.121320
8	2.828427

表7 $B(9, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-3.000000	5	0.333333
1	-2.333333	6	1.000000
2	-1.666667	7	1.666667
3	-1.000000	8	2.333333
4	-0.333333	9	3.000000

表8 $B(10, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-3.162278	6	0.632456
1	-2.529822	7	1.264911
2	-1.897367	8	1.897367
3	-1.264911	9	2.529822
4	-0.632456	10	3.162278
5	0.000000		

表 9 $B(11, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-3.316625	6	0.301511
1	-2.713602	7	0.904534
2	-2.110579	8	1.507557
3	-1.507557	9	2.110579
4	-0.904534	10	2.713602
5	-0.301511	11	3.316625

表 10 $B(12, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-3.464102	7	0.577350
1	-2.886751	8	1.154701
2	-2.309401	9	1.732051
3	-1.732051	10	2.309401
4	-1.154701	11	2.886751
5	-0.577350	12	3.464102
6	0.000000		

表 11 $B(13, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-3.605551	7	0.277350
1	-3.050851	8	0.832050
2	-2.496151	9	1.386750
3	-1.941451	10	1.941451
4	-1.386750	11	2.496151
5	-0.832050	12	3.050851
6	-0.277350	13	3.605551

表 12 $B(14, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-3.741657	8	0.534522
1	-3.207135	9	1.069045
2	-2.672612	10	1.603567
3	-2.138090	11	2.138090
4	-1.603567	12	2.672612
5	-1.069045	13	3.207135
6	-0.534522	14	3.741657
7	0.000000		

表 13 $B(15, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-3.872983	8	0.258199
1	-3.356586	9	0.774597
2	-2.840188	10	1.290994
3	-2.323790	11	1.807392
4	-1.807392	12	2.323790
5	-1.290994	13	2.840188
6	-0.774597	14	3.356586
7	-0.258199	15	3.872983

表 14 $B(16, 0.5)$ の Z 値

X	Z	X	Z
0	-4.000000	9	0.500000
1	-3.500000	10	1.000000
2	-3.000000	11	1.500000
3	-2.500000	12	2.000000
4	-2.000000	13	2.500000
5	-1.500000	14	3.000000
6	-1.000000	15	3.500000
7	-0.500000	16	4.000000
8	0.000000		

5.4 信頼区間

定義

確率変数 Z が標準正規分布に従うとき、

$$\Pr(-1.96 \leq z \leq +1.96) = 0.950 \quad (28)$$

である。この区間

$$-1.96 \leq z \leq +1.96 \quad (29)$$

を『95 % 信頼区間』という。

5.4.1 一般的な正規分布

定義

z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする。任意の実数 μ と正数 σ を使い

$$x = \sigma z + \mu \quad (30)$$

とすると、 x は平均 μ , 標準偏差 σ の正規分布に従う。この x の分布を『平均 μ , 標準偏差 σ の正規分布』といい、

$$N(\mu, \sigma^2) \quad (31)$$

とあらわす。

5.4.2 $N(\mu, \sigma^2)$ の『95% 信頼区間』

(30) を z について解くと

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{32}$$

を得る。(32) を (29) に代入し整理すると

$$\mu - 1.96 \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \sigma \tag{33}$$

である。この区間を $N(\mu, \sigma^2)$ の『95% 信頼区間』という。

5.4.3 $B(n, 0.5)$ の『95% 信頼区間』 $X \sim B(4, 0.5)$ の 95 % 信頼区間は

$$1 \leq x \leq 3 \quad (34)$$

 $X \sim B(5, 0.5)$ の 95 % 信頼区間は

$$1 \leq x \leq 4 \quad (35)$$

 $X \sim B(6, 0.5)$ の 95 % 信頼区間は

$$1 \leq x \leq 5 \quad (36)$$

 $X \sim B(7, 0.5)$ の 95 % 信頼区間は

$$1 \leq x \leq 6 \quad (37)$$

 $X \sim B(8, 0.5)$ の 95 % 信頼区間は

$$2 \leq x \leq 6 \quad (38)$$

 $X \sim B(9, 0.5)$ の 95 % 信頼区間は

$$2 \leq x \leq 7 \quad (39)$$

 $X \sim B(10, 0.5)$ の 95 % 信頼区間は

$$2 \leq x \leq 8 \quad (40)$$

問題 IX-5-3

- (1) $X \sim B(11, 0.5)$ の 95 % 信頼区間を求めなさい。
- (2) $X \sim B(12, 0.5)$ の 95 % 信頼区間を求めなさい。
- (3) $X \sim B(13, 0.5)$ の 95 % 信頼区間を求めなさい。
- (4) $X \sim B(14, 0.5)$ の 95 % 信頼区間を求めなさい。
- (5) $X \sim B(15, 0.5)$ の 95 % 信頼区間を求めなさい。
- (6) $X \sim B(16, 0.5)$ の 95 % 信頼区間を求めなさい。

解例 IX-5 - 3

$$(1) \quad 3 \leq x \leq 8$$

$$(2) \quad 3 \leq x \leq 9$$

$$(3) \quad 3 \leq x \leq 10$$

$$(4) \quad 4 \leq x \leq 10$$

$$(5) \quad 4 \leq x \leq 11$$

$$(6) \quad 5 \leq x \leq 11$$

5.5 仮説検定

数値例

コインを投げ裏が出る事象を E とする。
事象 E が起こる確率 $\Pr(E) = 0.5$ であるコインを投げたところ、 E が 10 回観測された。
このとき、投げた回数を n とする。

ここで、 $n = 16$ であると仮説を立てる。

$$H_1: n = 16 \quad (41)$$

事象 E の数を X とすると、 $B(16, 0.5)$ なの

で、仮説の下では

$$E(X) = 8 \quad (42)$$

$$V(X) = 4 \quad (43)$$

$$D(X) = 2 \quad (44)$$

である。 X は近似的に $N(8, 2^2)$ に従うので、
95% 信頼区間は

$$8 - 1.96 \times 2 \leq X \leq 8 + 1.96 \times 2 \quad (45)$$

$$4.08 \leq X \leq 11.92 \quad (46)$$

であり仮説は妥当である。

$n = 36$ であるとの仮説の場合

$$H_2: n = 36 \quad (47)$$

仮説の下では期待値と標準偏差は、

$$E(X) = 18 \quad (48)$$

$$V(X) = 9 \quad (49)$$

$$D(X) = 3 \quad (50)$$

なので、 $N(18, 3^2)$ の 95% 信頼区間は

$$18 - 1.96 \times 3 \leq X \leq 18 + 1.96 \times 3 \quad (51)$$

$$12.12 \leq X \leq 23.88 \quad (52)$$

なので $X = 10$ は 95% 信頼区間に入っていない。したがって、 $X = 10$ という状況は、 $n = 36$ という仮説の下では、 x が小さすぎることになる。

この基準を、『有意水準 0.05』または『有意水準 5%』『有意水準 $\alpha = 5\%$ 』などとあらわす。

5.5.1 仮説検定の考え方

前提となる状況を『帰無仮説』という。帰無仮説の下で「稀な現象」が発生した場合

1. 帰無仮説は妥当であるが、極めて『稀な現象』が偶々観測された。
2. 帰無仮説が不当であり、『普通の現象』が観測されただけ。

統計学では後者の立場を採用する。

- 帰無仮説が妥当ではないと判断することを『帰無仮説を棄却^{ききやく}する』という。
- 帰無仮説が棄却できないと判断することを『帰無仮説を受容^{じゅよう}する』という。
- 帰無仮説の妥当性に対して統計的基準を用いて判断することを『統計的検定』という。

5.5.2 棄却域

- 帰無仮説が正しいと仮定したときの観測された現象の珍しさの程度を『有意水準』といい α であらわす。
- 有意水準は正値 ($\alpha > 0$) であり、5%, 1% が良くとられる。
- $\Pr(Z \geq t) \leq \alpha$ を満たす最小の t を『臨界値』とよぶ。
- 標準正規分布において $\alpha = 5\%$ のとき、臨界値は 1.96 である。
- 信頼区間の外側の区間を『棄却域』とよぶ。
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ の $\alpha = 5\%$ の棄却域 w は

$$w = \{X = x \mid x < \mu - 1.96 \sigma, x > \mu + 1.96 \sigma\}$$

である。

5.6 区間推定

例題 1

コインを投げ裏が出る事象を E とする。事象 E がおこる確率 $\Pr(E) = 0.5$ であるコインを投げたところ、 E が 3 回観測された。このとき、投げた回数を n とする。『95% 信頼区間』で n を『区間推定』しなさい。

解法 1

$X \sim B(n, 0.5)$ において、 n を増やしなが

ら $X = 3$ の Z 値

$$z = \frac{3 - E(X)}{D(X)} \quad (53)$$

をもとめ、 Z 値が

$$-1.96 \leq z \leq 1.96 \quad (54)$$

に収まる n の範囲を求める。

$n = 3$ のとき、

$$E(X) = 3 \times 0.5 = 1.5$$

$$V(X) = 3 \times 0.5 \times 0.5 = 0.75$$

$$D(X) = \sqrt{0.75} = 0.866025 \dots$$

$X = 3$ なので Z 値は

$$z = \frac{3 - 1.5}{0.866025 \dots} = 1.732051 \dots$$

$n = 4$ のとき、

$$E(X) = 4 \times 0.5 = 2$$

$$V(X) = 4 \times 0.5 \times 0.5 = 1$$

$$D(X) = \sqrt{1} = 1$$

$$z = \frac{3 - 2}{1} = 1$$

$n = 5$ のとき、

$$E(X) = 5 \times 0.5 = 2.5$$

$$V(X) = 5 \times 0.5 \times 0.5 = 1.25$$

$$D(X) = \sqrt{1.25} = 1.118034 \dots$$

$$z = \frac{3 - 2.5}{1.118034 \dots} = 0.447214 \dots$$

$n = 6$ のとき、

$$E(X) = 6 \times 0.5 = 3.0$$

$$V(X) = 6 \times 0.5 \times 0.5 = 1.50$$

$$D(X) = \sqrt{1.50} = 1.224744871 \dots$$

$$z = \frac{3 - 3}{1.224744871 \dots} = 0$$

表 15 $n = 3 \sim 8$ の $x = 3$ の Z 値

n	$E(X)$	$V(X)$	$D(X)$	Z 値
3	1.5	0.75	0.866025	1.732
4	2.0	1.00	1.000000	1.000
5	2.5	1.25	1.118034	0.447
6	3.0	1.50	1.224745	0.000
7	3.5	1.75	1.322876	-0.378
8	4.0	2.00	1.414214	-0.707

表 16 $n = 9 \sim 14$ の $x = 3$ の Z 値

n	$E(X)$	$V(X)$	$D(X)$	Z 値
9	4.5	2.25	1.500000	-1.000
10	5.0	2.50	1.581139	-1.265
11	5.5	2.75	1.658312	-1.508
12	6.0	3.00	1.732051	-1.732
13	6.5	3.25	1.802776	-1.941
14	7.0	3.50	1.870829	-2.138

$X = 3$ のとき、 Z 値が 95% 信頼区間に入る n の範囲は

$$3 \leq n \leq 13 \quad (55)$$

である。

n が『95% 信頼区間』に入る区間を推定することを『区間推定』という。

例題 2

コインを投げ裏が出る事象を E とする。事象 E がおこる確率 $\Pr(E) = 0.5$ であるコインを投げたところ、 E が 10 回観測された。このとき、投げた回数を n とする。 n の区間を『95% 信頼区間』で『区間推定』しなさい。

解法 2

n を増やしながら、 $B(n, 0.5)$ における $X = 10$ のときの Z 値をもとめる。

$$E(X) = np = n \times 0.5 \quad (56)$$

$$V(X) = npq = n \times 0.5 \times 0.5 \quad (57)$$

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \times 0.5 \times 0.5} \quad (58)$$

$$z = \frac{10 - n \times 0.5}{\sqrt{n \times 0.25}} \quad (59)$$

$n = 12$ から $n = 31$ まで Z 値を求める。

表 17 $n = 12 \sim 19$ の $x = 10$ の Z 値

n	$E(X)$	$V(X)$	$D(X)$	z 値
12	6.0	3.00	1.732	2.309
13	6.5	3.25	1.803	1.941
14	7.0	3.50	1.871	1.604
15	7.5	3.75	1.936	1.291
16	8.0	4.00	2.000	1.000
17	8.5	4.25	2.062	0.728
18	9.0	4.50	2.121	0.471
19	9.5	4.75	2.179	0.229

表 18 $n = 20 \sim 25$ の $x = 10$ の Z 値

n	$E(X)$	$V(X)$	$D(X)$	z 値
20	10.0	5.00	2.236	0.000
21	10.5	5.25	2.291	-0.218
22	11.0	5.50	2.345	-0.426
23	11.5	5.75	2.398	-0.626
24	12.0	6.00	2.449	-0.816
25	12.5	6.25	2.500	-1.000

表 19 $n = 26 \sim 31$ の $x = 10$ の Z 値

n	$E(X)$	$V(X)$	$D(X)$	z 値
26	13.0	6.50	2.550	-1.177
27	13.5	6.75	2.598	-1.347
28	14.0	7.00	2.646	-1.512
29	14.5	7.25	2.693	-1.671
30	15.0	7.50	2.739	-1.826
31	15.5	7.75	2.784	-1.976

$X = 10$ のとき、 X が 95% 信頼区間に入る
 n の区間は

$$13 \leq n \leq 30 \quad (60)$$

である。

問題 IX-5-4

コインを投げ裏が出る事象を E とする。事象 E がおこる確率 $\Pr(E) = 0.5$ であるコインを投げたところ、 E が 4 回観測された。このとき、投げた回数を n とする。95% 信頼区間で n を区間推定しなさい。

問題 IX-5-5

コインを投げ裏が出る事象を E とする。事象 E がおこる確率 $\Pr(E) = 0.5$ であるコインを投げたところ、 E が 5 回観測された。このとき、投げた回数を n とする。95% 信頼区間で n を区間推定しなさい。

Z 値の算出に際して何らかのアプリを使用することは自由である。

解例 IX-5-4

$X \sim B(n, 0.5)$ において $X = 4$ のとき、 X が 95% 信頼区間に入る n の区間は

$$5 \leq n \leq 15$$

である。

解例 IX-5-5

$X \sim B(n, 0.5)$ において $X = 5$ のとき、 X が 95% 信頼区間に入る n の区間は

$$6 \leq n \leq 18$$

である。

5.7 まとめ

- 前提となる状況を『帰無仮説』という。
- 帰無仮説の妥当性に対して統計的基準を用いて判断することを『統計的検定』という。
- 帰無仮説が妥当ではないと判断することを『帰無仮説を棄却する』という。
- 統計的基準となる値を『有意水準』という。
- $X \sim B(n, p)$ において、 $X = x$ が与えられたとき、 n が『95% 信頼区間』に入る区間を推定することを『区間推定』という。

5.7.1 参考文献

- (1) 「行動科学における統計解析法」 芝祐順 南風原朝和 著 『東京大学出版会』 1990 年 3 月 20 日 初版
- (2) 「完全独習 統計学入門」 小島 寛之 著 『ダイヤモンド社』 2006 年 9 月 28 日 初版