第 IX 部　統計的検定

2　二項分布

- 二項分布
- 二項分布の期待値
- 二項分布の分散

2.1　はじめに

- ある事象に着目します。
- ある事象は起こるか起こらないかです。
- 何度も観測すると、起こった回数が分かります。
- この回数には法則があります。

2.2 確率

確率とは事象の起こりやすさを定量的に示すものである。

2.2.1 標本空間と事象

- 観測されうる結果を『標本点』とよぶ。
- 標本点の全体の集合を『標本空間』とよび Ω であらわす。
- 標本空間の部分集合を『事象』とよび大文字であらわす。
- 標本点を一つも含まないことも事象とみなし『空(くう)事象』とよび $\varnothing$ であらわす。
- 事象 A の起こる確率を $\Pr(A)$ であらわす。

2.2.2 事象の演算

- 事象 A と 事象 B 二つの事象において A と B が共通の標本点を持たない場合 A と B は『排反(はいはん)事象』であるという。また、A と B が共通の標本点を持たないことを A と B は排反であるという。
- 事象 A と事象 B 二つの事象のうち少なくとも一つがおこる事象を A と B の『和(わ)事象』とよび $A \cup B$ であらわす。
- 事象 A と事象 B 二つの事象が同時に起こる事象を『積(せき)事象』とよび $A \cap B$ であらわす。
- 事象 A が起こらない事象を『補(ほ)事象』とよび A^C であらわす。

定義

事象 A と 事象 B とそれらの積事象 $A \cap B$ の確率の関係が、

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\ \Pr(B) \tag{1}$$

である場合、事象 A と 事象 B は『独立』であるという。

積事象の確率を二つの事象の確率の積としてあらわすことができるとき二つの事象は独立である。

複数の事象が同時に起こる事象つまり積事象の確率を『同時確率』という。事象が独立な時、同時確率は事象の確率の積としてあらわすことができる。

2.2.3 確率の公理

確率の公理は次の 3 つからなる。これに合うならどのような数も確率と認められる。

1. すべての事象 A に対して

$$0 \leqq \Pr(A) \leqq 1$$

2. 標本空間 Ω 全体の確率は、

$$\Pr(\Omega) = 1$$

3. 互いに排反な事象 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ に対して

$$\Pr\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\right) = \Pr\left(A_1\right) + \Pr\left(A_2\right) + \Pr\left(A_3\right) + \cdots$$

2.3 組合せの数

2.3.1 順列の数

n 個の異なった文字

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \tag{2}$$

から r 個とってきて並べる事を考える。このとき異なった並べ方の個数を調べる。

最初の一個はどれでもいいので選び方は n 個ある。

2 番目は残りの $(n-1)$ のうちのいずれかなので、最初の n 個に対してそれぞれ $(n-1)$ 個ある。

したがって最初と 2 つ目の文字を選ぶ選び方の個数は $n(n-1)$ 個である。

これを r 個まで繰り返すと

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{3}$$

である。

いくつかのものを 1 列に並べた配列を順列とよぶ。n 個の異なった文字の中から r 個を選んで並べるとき、異なる並べ方の総数を

$$ {}_nP_r \tag{4} $$

という記号であらわす[1)]。

特に

$$ {}_nP_n = n(n-1)\cdots(2)(1) \tag{5} $$

のとき、この値を『n の階乗』とよび $n!$ であらわす。

$n = 0$ のとき

$$ 0! = 1 \tag{6} $$

と定義する。

1) Permutation 由来

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1) \tag{7}$$
$$= n \times \big((n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)\big) \tag{8}$$
$$= n(n-1)! \tag{9}$$

である。

階乗の記号を使うと ${}_nP_r$ は以下のようにあらわされる。

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= (n)(n-1)\cdots(n-r+1) && (10)\\
&= (n)(n-1)\cdots(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!} && (11)\\
&= \frac{(n)(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots(2)(1)}{(n-r)!} && (12)\\
&= \frac{n!}{(n-r)!} && (13)
\end{aligned}
$$

2.3.2 組合せの場合の数

n 個から r 個を選び出す選び方を組合せと呼び、異なる組合せの総数を

$$ {}_nC_r \tag{14} $$

という記号であらわす[2)]。

n 個から r 個を選んで並べる順列の場合の数は ${}_nP_r$ である。

n 個から r 個を選ぶ組合せの場合の数は ${}_nC_r$ である。

2) Combination 由来

n 個から r 個を選ぶ組合せにはそれぞれ r 個の成分があり、それらを並べる順列の場合の数は ${}_rP_r = r!$ 個ある。

したがって以下の関係が成り立つ

$$ {}_nP_r = {}_nC_r \times {}_rP_r \tag{15} $$

$$ \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nC_r \times r! \tag{16} $$

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} \tag{17} $$

$r = 0$ のとき

「なにも並べない」という一通りがあると考え

$$ {}_nC_0 = 1 \tag{18}$$

と定義する。

問題 IX−2 − 1

次の組合せの場合の数を求めなさい。

1. ${}_8C_0$
2. ${}_8C_1$
3. ${}_8C_2$
4. ${}_8C_3$
5. ${}_8C_4$
6. ${}_8C_5$
7. ${}_8C_6$
8. ${}_8C_7$
9. ${}_8C_8$

問題 IX−2 − 2

次の組合せの場合の数を求めなさい。

1. ${}_4C_0$
2. ${}_4C_1$
3. ${}_4C_2$
4. ${}_4C_3$
5. ${}_4C_4$

解例 IX−**2 − 1**

$${}_8C_0 = 1$$

$${}_8C_1 = \frac{8!}{1! \times (8-1)!} = \frac{8!}{1! \times 7!}$$
$$= \frac{8 \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{(1) \times (\cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1})} = 8$$

$${}_8C_2 = \frac{8!}{2! \times (8-2)!} = \frac{8!}{2! \times 6!}$$
$$= \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{(2 \times 1) \times (\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1})} = 28$$

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 56$$

$${}_8C_4 = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

$${}_8C_5 = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56$$

$${}_8C_6 = 28$$

$${}_8C_7 = 8$$

$${}_8C_8 = 1$$

解例 IX−2 − 2

$$
\begin{aligned}
{}_4C_0 &= 1 \\
{}_4C_1 &= 4 \\
{}_4C_2 &= 6 \\
{}_4C_3 &= 4 \\
{}_4C_4 &= 1
\end{aligned}
$$

2.4 二項分布

コインを投げ裏の出る事象を E とする。$\Pr(E) = p$, $\Pr(E^C) = q$ とする。n 回投げたときの事象 E が起こる回数を X であらわす。

- コインを投げる試行はそれぞれ独立な試行なので、n 回投げて x 回裏が出るときの同時確率は $p^x q^{n-x}$ である。
- このときの事象の数は ${}_nC_x$ だけある。
- $\Pr(X = x) = {}_nC_x\ p^x q^{n-x}$ である。

表 1　X の分布

x	$\Pr(X = x)$
0	${}_nC_0\ p^0 q^n$
1	${}_nC_1\ p^1 q^{n-1}$
2	${}_nC_2\ p^2 q^{n-23}$
⋮	⋮
x	${}_nC_x\ p^x q^x$
⋮	⋮
$n-1$	${}_nC_{n-1}\ p^{n-1} q^1$
n	${}_nC_n\ p^n q^0$

2.4.1　$n = 4,\ p = 0.4$ の場合

$n = 4,\ p = 0.4$ ならば、$q = 0.6$ なので、同時確率は、

$$p^x(1-p)^{8-x} = 0.4^x \times 0.6^{4-x} \qquad (19)$$

であり、そしてその組み合わせの数だけある。これをまとめたものが、表 2 である。

表 2　$n = 4,\ p = 0.4$ の X の分布

x	$\Pr(X = x)$		
0	${}_4C_0(0.4)^0(0.6)^{(4-0)}$	1×0.1296	0.1296
1	${}_4C_1(0.4)^1(0.6)^{(4-1)}$	4×0.0864	0.3456
2	${}_4C_2(0.4)^2(0.6)^{(4-2)}$	6×0.0576	0.3456
3	${}_4C_3(0.4)^3(0.6)^{(4-3)}$	4×0.0384	0.1536
4	${}_4C_4(0.4)^4(0.6)^{(4-4)}$	1×0.0256	0.0256

問題 IX−2 − 3

$B(4,\ 0.5)$ の分布を表にまとめなさい。

2.4.2 $n = 4,\ p = 0.5$ の場合

$n = 4,\ p = 0.5$ ならば、$q = 0.5$ なので、同時確率は、

$$p^x(1-p)^{8-x} = 0.5^x \times 0.5^{4-x} \tag{20}$$

$$= 0.5^{x+4-x} = \frac{1}{16} \tag{21}$$

であり、そしてその組み合わせの数だけあるので、

$$\Pr(X = x) = \frac{{}_4C_x}{16} \tag{22}$$

である。

表 3 $n = 8,\ p = 0.5$ の X の分布

x	$\Pr(X = x)$	
0	1/16	0.0625
1	4/16	0.2500
2	6/16	0.3750
3	4/16	0.2500
4	1/16	0.0625

2.4.3 $n = 8,\ p = 0.5$ の場合

$n = 8,\ p = 0.5$ ならば、$q = 0.5$ なので、同時確率は、

$$p^x(1-p)^{8-x} = 0.5^x \times 0.5^{8-x} \tag{23}$$

$$= 0.5^{x+8-x} = \frac{1}{256} \tag{24}$$

であり、そしてその組み合わせの数だけあるので、

$$\Pr(X = x) = \frac{{}_8C_x}{256} \tag{25}$$

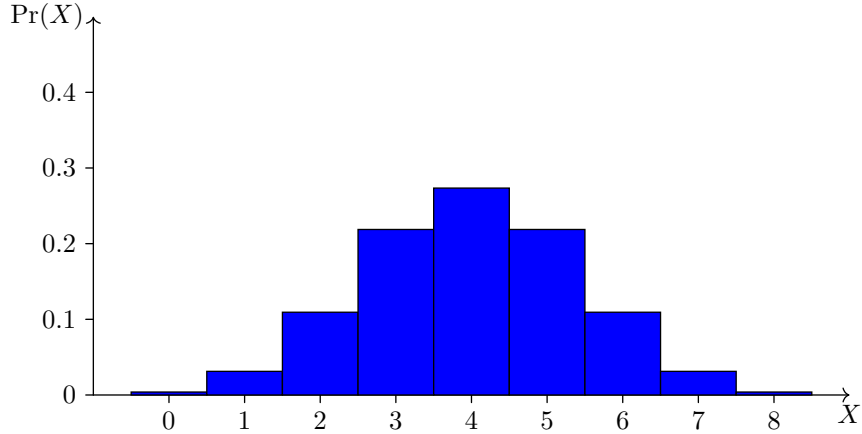
である。

表 4 $n = 8,\ p = 0.5$ の X の分布

x	$\Pr(X = x)$	
0	1/256	0.003 906
1	8/256	0.031 250
2	28/256	0.109 375
3	56/256	0.218 750
4	70/256	0.273 437
5	56/256	0.218 750
6	28/256	0.109 375
7	8/256	0.031 250
8	1/256	0.003 906

v

図 1　$n = 8,\ p = 0.5$ のときの X の分布



2.4.4　$n = 8,\ p = 0.4$ の場合

$n = 8,\ p = 0.4,\ q = 0.6$ ならば、x の同時確率は、

$$p^x(1-p)^{8-x} = 0.4^x \times 0.6^{8-x} \tag{26}$$

$$= \frac{4^x \times 6^{8-x}}{10^8} \tag{27}$$

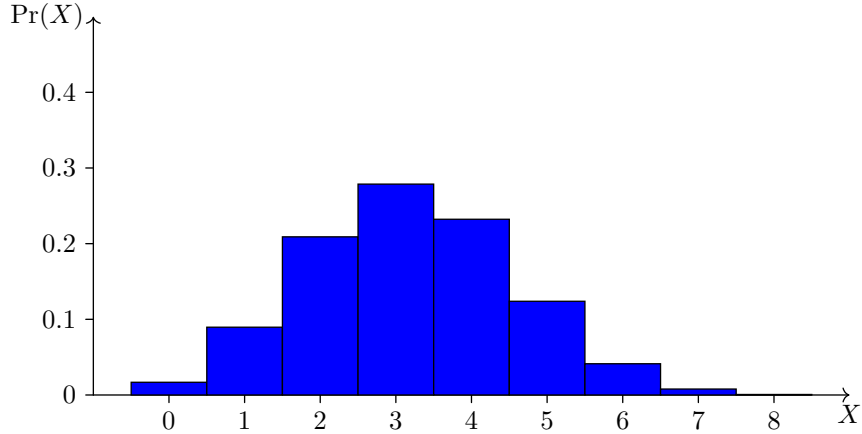
なので、これに組合せの数を掛けた値が $\Pr(X = x)$ である。

$$\Pr(X = x) = {}_8C_x \frac{4^x \times 6^{8-x}}{10^8} \tag{28}$$

表 5　$n = 8,\ p = 0.4$ の X の分布

x	$\Pr(X = x)$	
0	${}_8C_0 \times 4^0 6^8/10^8$	0.016 796
1	${}_8C_1 \times 4^1 6^7/10^8$	0.089 579
2	${}_8C_2 \times 4^2 6^6/10^8$	0.209 018
3	${}_8C_3 \times 4^3 6^5/10^8$	0.278 691
4	${}_8C_4 \times 4^4 6^3/10^8$	0.232 243
5	${}_8C_5 \times 4^5 6^3/10^8$	0.123 863
6	${}_8C_6 \times 4^6 6^2/10^8$	0.041 287
7	${}_8C_7 \times 4^7 6^1/10^8$	0.007 864
8	${}_8C_8 \times 4^8 6^0/10^8$	0.000 655

図 2　$n = 8,\ p = 0.4$ のときの X の分布



2.4.5　$n = 8,\ p = 0.3$ の場合

$n = 8,\ p = 0.3,\ q = 0.7$ ならば、$\Pr(X = x)$ は、

$$\Pr(X = x) = {}_8C_x p^x (1-p)^{8-x} \tag{29}$$

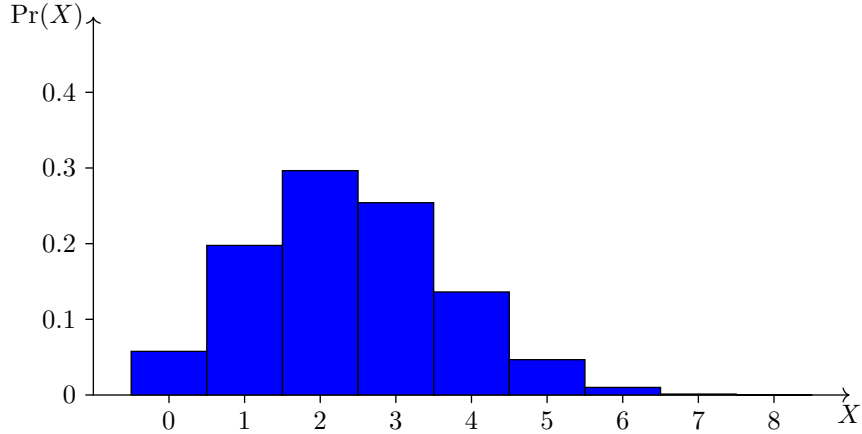
$$= {}_8C_x \frac{3^x \times 7^{8-x}}{10^8} \tag{30}$$

である。

表 6　$n = 8,\ p = 0.3$ の X の分布

x	$\Pr(X = x)$
0	$0.057\,648\cdots$
1	$0.197\,650\cdots$
2	$0.296\,475\cdots$
3	$0.254\,121\cdots$
4	$0.136\,136\cdots$
5	$0.046\,675\cdots$
6	$0.010\,001\cdots$
7	$0.001\,224\cdots$
8	$0.000\,065\cdots$

図 3　$n = 8,\ p = 0.3$ のときの X の分布



定義

ある試行において事象 E の起こる確率を $\Pr(E) = p$、その補事象の確率を $\Pr(E^C) = q$ とする。この試行を独立に n 回繰り返すとき、事象 E の起こる回数を X とすれば X の確率分布は

$$\Pr(X = x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} \tag{31}$$

である。この確率分布を確率 p に対する次数 n の二項分布といい、$B(n, p)$ という記号であらわす。

表 7　x が $B(100,\ 0.5)$ に従うときの確率

X	$\Pr(X)$	X	$\Pr(X)$	X	$\Pr(X)$
$x \leqq 38$	0.010 489	$39 \leqq x \leqq 61$	0.979 021	$62 \leqq x$	0.010 489
$x \leqq 39$	0.017 600	$40 \leqq x \leqq 60$	0.964 800	$61 \leqq x$	0.017 600
$x \leqq 40$	0.028 444	$41 \leqq x \leqq 59$	0.943 112	$60 \leqq x$	0.028 444
$x \leqq 41$	0.044 313	$42 \leqq x \leqq 58$	0.911 374	$59 \leqq x$	0.044 313
$x \leqq 42$	0.066 605	$43 \leqq x \leqq 57$	0.866 789	$58 \leqq x$	0.066 605
$x \leqq 43$	0.096 674	$44 \leqq x \leqq 56$	0.806 652	$57 \leqq x$	0.096 674
$x \leqq 44$	0.135 627	$45 \leqq x \leqq 55$	0.728 747	$56 \leqq x$	0.135 627
$x \leqq 45$	0.184 101	$46 \leqq x \leqq 54$	0.631 798	$55 \leqq x$	0.184 101
$x \leqq 46$	0.242 059	$47 \leqq x \leqq 53$	0.515 882	$54 \leqq x$	0.242 059

2.5 期待値と分散

2.5.1 期待値

定義

確率変数 (X) において x_i に対応する確率 (p_i) による加重平均を『期待値』といい $E(X)$ という記号であらわす。

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{32}$$

2.5.2 期待値の演算

a, c を定数とし X を確率変数とする。期待値に関して以下の関係が成り立つ。

$$E(c) = c \tag{33}$$

$$E(X + c) = E(X) + c \tag{34}$$

$$E(aX) = a\ E(X) \tag{35}$$

問題 IX−2 − 4

a, c を定数とし X を確率変数とする。以下の関係が成り立つことを示しなさい。

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(aX) = a\ E(X)$

解例 IX−**2 − 4**

$$\begin{aligned} E(c) &= \sum_{i=1}^{n} c\ p_i \\ &= c\sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= c \end{aligned}$$

(終)

$$\begin{aligned} E(X+c) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + c)p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i p_i + cp_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} cp_i \\ &= E(X) + c \end{aligned}$$

(終)

$$
\begin{aligned}
E(aX) &= \sum_{i=1}^{n} a x_i p_i \\
&= a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\
&= aE(X)
\end{aligned}
$$

(終)

2.5.3 数値例 $B(4, p)$

$\Pr(E) = p$ とする。$\Pr(E^C) = 1 - p = q$ とする。確率 p に対する次数 4 の二項分布

$$\Pr(X = x) = {}_4C_x p^x q^{4-x} \qquad ; x = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{36}$$

を考える。$B(4, p)$ の期待値は

$$E(X) = \sum_{x=0}^{4} x \times {}_4C_x p^x q^{4-x} \tag{37}$$

$$= \sum_{x=0}^{4} x \times \frac{4!}{x!\ (4-x)!} p^x q^{4-x} \tag{38}$$

第 1 項は $x = 0$ なので 0 となる。ここで総和の項を一つ減らし $x = 1$ からの総和であらわすと

$$= \sum_{x=1}^{4} x \times \frac{4!}{x!\ (4-x)!} p^x q^{4-x} \tag{39}$$

$$= \sum_{x=1}^{4} \cancel{x} \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{\cancel{x} \times (x-1)!\ (4-1-x+1)!)} p\ p^{x-1} q^{4-1-x+1} \tag{40}$$

$$= \sum_{x=1}^{4} \frac{4 \times 3!}{(x-1)!\ ((4-1)-(x-1))!} p\ p^{x-1} q^{(4-1)-(x-1)} \tag{41}$$

ここで総和を使わずにあらわすと

$$= \frac{4 \times 3!}{0!\ 3!} p p^0 q^3 + \frac{4 \times 3!}{1!\ 2!} p p^1 q^2 + \frac{4 \times 3!}{2!\ 1!} p p^2 q^1 + \frac{4 \times 3!}{3!\ 0!} p p^3 q^0 \tag{42}$$

共通因数でくくり

$$=4p\left(\frac{3!}{0!\,3!}p^0q^3+\frac{3!}{1!\,2!}p^1q^2+\frac{3!}{2!\,1!}p^2q^1+\frac{3!}{3!\,0!}p^3q^0\right) \tag{43}$$

ここで括弧内の項の数え方を考える。第 1 項を 1 として数えると第 4 項は 4 が相当する。第 1 項を 0 として数え始めると第 4 項には 3 が相当する。このことを踏まえ $y=0$ から $m=3$ までの総和であらわすと

$$=4p\sum_{y=0}^{3}\ {}_3C_y\ p^y\ q^{3-y} \tag{44}$$

確率の公理より総和部分は 1 なので

$$=4p \tag{45}$$

2.5.4 二項分布の期待値

確率 p に対する次数 n の二項分布は、

$$\Pr(X = x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} \tag{46}$$

であるから期待値は、

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \times {}_nC_x p^x q^{n-x} \tag{47}$$

第 1 項は $x = 0$ なので、$x = 1$ から n の総和であらわすと、

$$= \sum_{x=1}^{n} x \times \frac{n!}{x!\ (n-x)!} p^x q^{n-x} \tag{48}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!\ (n-1-x+1)!} p p^{x-1} q^{n-x} \tag{49}$$

n, p を総和の外に掃き出し、

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\ (n-1-x+1)!} p^{x-1} q^{n-1-x+1} \tag{50}$$

ここで $y = x - 1$、$m = n - 1$ とおくと、

$$= np \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{(y)!\ (m-y)!} p^y q^{m-y} \tag{51}$$

$$= np \sum_{y=0}^{m} {}_mC_y p^y q^{m-y} \tag{52}$$

確率の公理より $\sum_{y=0}^{m} {}_mC_y p^y q^{m-y} = 1$ なので

$$= np \tag{53}$$

2.5.5 期待値からの偏差

確率変数 X と期待値 $(E(X))$ の差を『期待値からの偏差』という。

$$X - E(X) \tag{54}$$

2.5.6 確率変数の分散

定義

確率変数 X の「『期待値からの偏差』の二乗」の期待値を『分散』といい $V(X)$ であらわす。

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) \tag{55}$$

2.5.7 分散の演算

a, c を定数とし、X を確率変数とすると、分散に関して以下の関係が成り立つ。

$$V(c) = 0 \tag{56}$$

$$V(X + c) = V(X) \tag{57}$$

$$V(aX) = a^2 V(X) \tag{58}$$

2.5.8 確率変数の標準偏差

定義

確率変数 X の『分散』の正の平方根を『標準偏差』といい σ_X または $D(X)$ であらわす。

$$\sigma_X = D(X) = \sqrt{V(X)} \tag{59}$$

ここで分散の式を展開する。

$$E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - E(X)\right)^2 p_i \tag{60}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2 - 2E(X)x_i + \left(E(X)\right)^2\right)p_i \tag{61}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2 p_i - 2E(X)x_i p_i + \left(E(X)\right)^2 p_i\right) \tag{62}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i - 2E(X)\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + \left(E(X)\right)^2\sum_{i=1}^{n}p_i \tag{63}$$

第一項は ${x_i}^2$ の期待値なので $E\left(X^2\right)$ とあらわし

$$= E\left(X^2\right) - 2E(X)\ E(X) + \left(E(X)\right)^2 \tag{64}$$

$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 \tag{65}$$

2.5.9 二項分布の分散

確率 p に対する次数 n の確率変数の分散を求めるために X^2 の期待値を求める。

$$E\left(X^2\right) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \ {}_nC_x \ p^x q^{n-x} \tag{66}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!\ (n-x)!} \ p^x q^{n-x} \tag{67}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \left(x^2 - x + x\right) \frac{n!}{x!\ (n-x)!} \ p^x q^{n-x} \tag{68}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \left(x\left(x-1\right) + x\right) \frac{n!}{x!\ (n-x)!} \ p^x q^{n-x} \tag{69}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\,(x-1)\,\frac{n!}{x!\;(n-x)!}\;p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x\frac{n!}{x!\;(n-x)!}\;p^x q^{n-x} \tag{70}$$

第二項は $E(X)$ なので np

$$= \sum_{x=0}^{n} x\,(x-1)\,\frac{n!}{x!\;(n-x)!}\;p^x q^{n-x} + np \tag{71}$$

総和部分第 1 項並びに第 2 項は 0 なので、$x = 2$ からの総和であらわし、

$$= \sum_{x=2}^{n} x\,(x-1)\,\frac{n(n-1)(n-2)!}{x\,(x-1)\,(x-2)!\;(n-2-x+2)!}\;p^2 p^{x-2} q^{n-2-x+2} + np \tag{72}$$

$n(n-1)$ と p^2 を総和の外へ掃き出し、

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\ ((n-2)-(x-2))!}\ p^{x-2}q^{(n-2)-(x-2)} + np \tag{73}$$

$y = x-2, m = n-2$ とおくと、

$$= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!\ (m-y)!}\ p^y q^{m-y} + np \tag{74}$$

確率の公理により総和部分は 1 なので

$$= n(n-1)p^2 + np \tag{75}$$

分散 $V(X)$ は $E\left(X^2\right) - (E(X))^2$ なので、

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \tag{76}$$
$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \tag{77}$$
$$= -np^2 + np \tag{78}$$
$$= np(1-p) \tag{79}$$
$$= npq \tag{80}$$

定理 IX−2 − 1

確率 p に対する次数 n の二項分布 $B(n,p)$ の期待値と分散は

$$E(X) = np \tag{81}$$

$$V(X) = npq \tag{82}$$

である。

従って、$B(n,\ p)$ に従う確率変数 X の標準偏差は

$$D(X) = \sqrt{npq} \tag{83}$$

である。

2.5.10 $B(8,p)$ の期待値と分散

確率 $p=0.5$ に対する次数 $n=8$ の二項分布 B(8,0.5) の期待値、分散、標準偏差は、

$$E(X)=8\times 0.5=4 \tag{84}$$

$$V(X)=8\times 0.5\times 0.5=2 \tag{85}$$

$$D(X)=\sqrt{2} \tag{86}$$

である。

問題 IX−2 − 5

$B(8,0.4)$ の期待値, 分散ならびに標準偏差を求めなさい。

問題 IX−2 − 6

$B(8,0.3)$ の期待値, 分散ならびに標準偏差を求めなさい。

表 8 $n = 8$ の二項分布の期待値と分散と標準偏差

p	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
期待値	7.2	6.4	5.6	4.8	4.0	3.2	2.4	1.6	0.8
分散	0.72	1.28	1.68	1.92	2.00	1.92	1.68	1.28	0.72
標準偏差	0.8485	1.1314	1.2961	1.3856	1.414	1.386	1.2961	1.1314	0.8485

2.6 まとめ

- 確率変数 $X = x_i$ の期待値は

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ p_i$$

- 事象 E の起こる確率が p、事象 E の補事象の確率が q である試行を n 回繰り返したときの事象 E の起こる回数を X とすると、確率変数 X の確率分布は二項分布 $B(n,p)$ に従う。
- $B(n,p)$ の確率分布は

$$\Pr(X = x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$$

- 確率変数 X が $B(n,p)$ に従うとき X の期待値は $E(X) = np$ であって、分散は $V(X) = npq$ である。

2.6.1 参考文献

(1) 「行動科学における統計解析法」芝祐順　南風原朝和　著 『東京大学出版会』1990 年 3 月 20 日　初版

(2) 「完全独習　統計学入門」小島　寛之　著 『ダイヤモンド社』2006 年 9 月 28 日　初版