第 X 部　市場調査論

6　総括

- 3 つのモデル
- 多変量化の意味
- モデルの限界と拡張
- 数学を使った説明の意味

6.1　おわりにかえて

- 何が理解できて何を理解できていないのかを知る方法として数学は最も手軽な方法です。
- 解ければ分っているのです。
- 解けなければ分かっていないのです。
- 正しく理解できたかどうかを客観的に判断する方法が数学です。

6.2 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の関係をあらわす関数

y を x の関数とし、$y = f(x)$ とあわらす。α, β をパラメータとし、x と y の関係をあらわす関数の形をできるだけ単純なもとして候補を挙げる。

$$y = \alpha + \beta x \tag{1}$$

$$y = \alpha x^{\beta} \qquad : \alpha > 0,\ x > 0,\ y > 0 \tag{2}$$

$$y = ab^{x} \qquad : a > 0,\ b > 0,\ y > 0 \tag{3}$$

6.3 $\boldsymbol{y = \alpha + \beta x}$

- 線型モデルとして紹介
- x, y, α, β には一切の制約はない
- 定義域も値域も $(-\infty, +\infty)$

x に定数 c を加えることを考える。

$$y = \alpha + \beta(x + c) \tag{4}$$
$$= \alpha + \beta c + \beta x \tag{5}$$
$$= (\alpha + \beta c) + \beta x \tag{6}$$

ここで $\alpha + \beta c = \alpha_1$ とおくと

$$y = \alpha_1 + \beta x \tag{7}$$

である。

次に x を定数 c 倍する。

$$y = \alpha + \beta\,(cx) \tag{8}$$
$$= \alpha + (\beta c)\,x \tag{9}$$

ここで $\beta c = \beta_1$ とおくと

$$y = \alpha + \beta_1 x \tag{10}$$

である。これらの結果から線型モデルにおいて定数を加える変数変換は β に影響しないが、定数倍する変数変換は β へ影響することがわかる。

6.4 $y = \alpha x^{\beta}$

- 冪乗モデルとして紹介
- x, y, α に正値を仮定
- 定義域も値域も $(0, +\infty)$
- 対数変換により線型モデルに帰着
- $\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x$
- 相性の良い指標は『点弾力性』

x を定数 c 倍することを考える。だたし $c > 0$ とする。

$$y = \alpha\left(cx\right)^{\beta} \tag{11}$$

$$= \alpha c^{\beta} x^{\beta} \tag{12}$$

ここで、$\alpha c^{\beta} = \alpha_1$ とおくと

$$y = \alpha_1 x^{\beta} \tag{13}$$

である。冪乗モデルにおいて、独立変数を定数倍する変数変換では β は影響を受けない。

6.5 $\boldsymbol{y = ab^x}$

- 指数モデルとして紹介
- $a,\ b, y$ に正値を仮定
- 定義域は $(-\infty,\ +\infty)$、値域は $0,\ +\infty$

仮定により、$a > 0, b > 0$ なので α, β を用い

$$a = \exp(\alpha) \tag{14}$$

$$b = \exp(\beta) \tag{15}$$

とあらわすことができる。これを使うと、

$$y = ab^x \tag{16}$$

$$= \exp(\alpha)\left(\exp(\beta)\right)^x \tag{17}$$

$$= \exp(\alpha)\exp(\beta x) \tag{18}$$

$$= \exp(\alpha + \beta x) \tag{19}$$

(19) の従属変数にオッズ $\left(\dfrac{p}{1-p}\right)$ を採用すると

$$\frac{p}{1-p} = \exp(\alpha + \beta x) \tag{20}$$

である。

(20) を p に関して解くと

$$\frac{p}{1-p} = \exp(\alpha + \beta x) \tag{20}$$

$$\frac{1-p}{p} = \exp(-(\alpha + \beta x)) \tag{21}$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \exp(-(\alpha + \beta x)) \tag{22}$$

$$\frac{1}{p} = 1 + \exp(-(\alpha + \beta x)) \tag{23}$$

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha + \beta x))} \tag{24}$$

(24) はロジスティックモデルである。

- 指数モデルは従属変数にオッズを採用するとロジスティックモデルに帰着する。
- ロジスティックモデルはロジスティック変換により、線型モデルに帰着する。
- ロジスティックモデルは確率の公理を満たすモデルである。
- 影響力の指標はオッズ比

6.6　ロジットモデル

- 2000 年のノーベル経済学賞の理由となったモデル。
- マーケティング固有のモデルと呼ばれる。
- 2 つの選択肢から選択肢 1 を選ぶ確率を p_1、選択肢 j の効用を $V_i = U_j + \varepsilon_j$ とする。
- ε_j に第一種極値分布を仮定すると p_1 は

$$p_1 = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2)}$$

- $U_j = \sum_{k=1}^{m} \beta_k x_{jk}$ を仮定するとロジットモデルはロジスティックモデルに帰着する。

6.7 多変数化のもたらす影響

- 独立変数や従属変数に複数の変量を採用することを多変数化という。
- 多変数化により対応できる場面が増え、分析上の課題も増える。
  - 質的データの分析
  - 影響力の比較
  - 交互作用の把握
  - 市場の階層性の分析
  - 多重共線性

6.8 本講座の話題

- 講義を通じて紹介したモデルは単純で汎用性の高いもの。
- モデルごとに特徴があり、それぞれ限界を持つ。
- モデルの仮定を逸脱すると適正な結論を得ることはできない。
- モデルの限界はモデルを適切に理解したことにより把握可能である。
- モデルを拡張する場合は数学的に妥当であることを示す必要がある。

6.9 本講座に含まなかったこと

- 統計的検定
- 信頼区間
- 仮説検定
- 標本平均の分布
- 母平均の区間推定
- χ^2 分布
- t 分布

6.10 資料のみを提示したもの

- 決定係数
- ロジスティック曲線の導出
- 最尤推定値が最大値を持つ理由
- ネイピア数 e が無理数である証明