

第 VI 部 Logit model

5 多項ロジット

ポイント

- 選択肢が 3 つ以上の場合への対応
- 既存の選択肢間の関係

5.1 はじめに

- 素朴なことの繰り返しは、多くのことを示唆しています。
- 今までやってきたことと同じことを繰り返すと、新しいことに気づくことがあります。
- 何かをつかむ瞬間は、ふとしたことから得られます。

不定積分の公式

これまで確認された不定積分の公式を示しておく。

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \quad (1)$$

$$\int \alpha f(x) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx \quad (2)$$

$$\int \exp(x) \, dx = \exp(x) \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| \quad ; x \neq 0 \quad (4)$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad ; \alpha \neq -1, x > 0 \quad (5)$$

定理 IV-4-1(合成関数の微分)

$y = G(x)$ が区間 (a, b) で微分可能であるとする。更に $z = F(y)$ が $y = G(x)$ の値域を含む区間において微分可能であれば、合成関数 $z = F(G(x))$ は区間 (a, b) で微分可能であって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (6)$$

が成立する。

(6) は

$$(F(G(x)))' = F'(G(x)) G'(x) \quad (7)$$

ともかく。

定理 VI-1-4 (置換積分)

$G(x)$ を連続な導関数を持つ関数として

$$y = G(x) \tag{8}$$

とおけば

$$\int f(G(x))G'(x) dx = \int f(y) dy \tag{9}$$

が成立する。ここで $G(x)$ の値域は $f(y)$ の定義域に含まれているものとする。

問題 VI-5-1

ε で微分しなさい。

$$F(\varepsilon) = \exp(-\exp(-\varepsilon))$$

問題 VI-5-2

ε を積分変数として不定積分を求めなさい。ただし解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon) \exp(-\exp(-\varepsilon))$$

問題 VI-5-3

定積分を求めなさい。

$$\int_{-\infty}^x \exp(-\varepsilon) \exp(-\exp(-\varepsilon)) d\varepsilon$$

問題 VI-5-4

x を積分変数として不定積分を求めなさい。ただし、 $\alpha \neq 0$ とし、解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(x) = \exp(\alpha x)$$

解例 VI-5-1

$$w = \exp(-\exp(-\varepsilon))$$

$$z = -\exp(-\varepsilon)$$

$$y = -\varepsilon$$

とおき

$$w = \exp(z)$$

$$z = -\exp(y)$$

とする。

それぞれを微分すると

$$\frac{dw}{dz} = \exp(z)$$

$$\frac{dz}{dy} = -\exp(y)$$

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = -1$$

合成関数の微分の定理より

$$\begin{aligned} F'(\varepsilon) &= \frac{dw}{d\varepsilon} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} \frac{dy}{d\varepsilon} \\ &= \exp(z) (-\exp(y)) (-1) \\ &= \exp(-\varepsilon) \exp(-\exp(-\varepsilon)) \end{aligned}$$

解例 VI-5-2

$$u = -\exp(-\varepsilon)$$

$$v = -\varepsilon$$

とおき、

$$u = -\exp(v)$$

それぞれ微分すると

$$\frac{du}{dv} = -\exp(v)$$

$$\frac{dv}{d\varepsilon} = -1$$

合成関数の微分の定理により

$$\frac{du}{d\varepsilon} = (-\exp(v))(-1) = \exp(-\varepsilon)$$

最左辺と最右辺を抜き出し、形式的に最左辺を分数にみたてて分母を払い

$$du = \exp(-\varepsilon) d\varepsilon$$

とする。

したがって、置換積分の定理より

$$\begin{aligned}\int \exp(-\varepsilon) \exp(-\exp(-\varepsilon)) d\varepsilon &= \int \exp(-\exp(-\varepsilon)) \exp(-\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \int \exp(u) du \\ &= \exp(u) \\ &= \exp(-\exp(-\varepsilon))\end{aligned}$$

積分定数省略。

解例 VI-5 - 3

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^x \exp(-\varepsilon) \exp(-\exp(-\varepsilon)) d\varepsilon &= \left[\int \exp(-\varepsilon) \exp(-\exp(-\varepsilon)) d\varepsilon \right]_{-\infty}^x \\&= \left[\exp(-\exp(-\varepsilon)) \right]_{-\infty}^x \\&= \exp(-\exp(-(x))) - \exp(-\exp(-(-\infty))) \\&= \exp(-\exp(-x)) - \exp(-\exp(\infty)) \\&= \exp(-\exp(-x)) - \exp(-\infty) \\&= \exp(-\exp(-x))\end{aligned}$$

解例 VI-5 - 4

$$y = \alpha x$$

とおき微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \alpha$$

形式的に左辺を分数に見立てて左辺の分母を
払うと

$$dy = \alpha \, dx$$

したがって置換積分の定理より

$$\begin{aligned}\int \exp(\alpha x) \, dx &= \int \frac{\alpha}{\alpha} \exp(\alpha x) \, dx \\&= \int \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x) \alpha \, dx \\&= \int \frac{1}{\alpha} \exp(y) \, dy \\&= \frac{1}{\alpha} \int \exp(y) \, dy \\&= \frac{1}{\alpha} \exp(y) \\&= \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x)\end{aligned}$$

積分定数省略。

5.1.1 ロジットモデルにおける効用の仮定

個人を識別する添え字に i 、選択肢を識別する添え字に j を採用する。

- 個人 i における選択肢 j に関する効用全体を V_{ij} とする。
- 個人 i における選択肢 j に関する効用の確定的な部分を U_{ij} とする。
- 個人 i における選択肢 j に関する効用の確率的な部分を ε_{ij} とする。

効用全体を確定的な部分と確率的な部分の和として定義する。

$$V_{ij} = U_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{10}$$

5.1.2 効用の確率的な部分に関する仮定

- 効用の確率的な部分 ε_{ij} は完全に確率的に決まる。
- ε_{ij} は選択肢ごとにそれぞれ独立に第一種極値分布に従う。

第一種極値分布の確率密度関数

$$f(\varepsilon_{ij}) = \exp(-\varepsilon_{ij}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{ij})) \quad (11)$$

第一種極値分布の累積分布関数

$$F(\varepsilon_{ij}) = \exp(-\exp(-\varepsilon_{ij})) \quad (12)$$

5.2 選択肢が 3 つの多項ロジットモデル

- 3 つある選択肢から選択肢 j が選ばれる確率を p_{ij} とあらわす。
- ここで選択肢 1 が選ばれる場合を考える。
- 3 つの選択肢から選択肢 1 が選ばれたのは、選択肢 1 の全体効用 (V_{i1}) が他の選択肢の全体効用以上だったから。
- つまり、 $V_{i1} \geq V_{i2}$ かつ $V_{i1} \geq V_{i3}$ であったから。

したがって選択肢 1 が選ばれる確率 (p_{i1}) は

$$p_{i1} = \Pr(V_{i1} \geq V_{i2}, V_{i1} \geq V_{i3}) \quad (13)$$

$V_{ij} = U_{ij} + \varepsilon_{ij}$ なので

$$p_{i1} = \Pr(U_{i1} + \varepsilon_{i1} \geq U_{i2} + \varepsilon_{i2}, \quad U_{i1} + \varepsilon_{i1} \geq U_{i3} + \varepsilon_{i3}) \quad (14)$$

$$= \Pr(\varepsilon_{i2} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}, \quad \varepsilon_{i3} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i3}) \quad (15)$$

ε_{ij} は独立に第一種極値分布 $f(\varepsilon_{ij})$ に従うので

$$p_{i1} = \iiint_D f(\varepsilon_{i1}) f(\varepsilon_{i2}) f(\varepsilon_{i3}) d\varepsilon_{i1} d\varepsilon_{i2} d\varepsilon_{i3},$$

$$D : \{-\infty \leq \varepsilon_1 \leq +\infty, \varepsilon_{i2} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}, \varepsilon_{i3} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i3}\} \quad (16)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}} \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i3}} f(\varepsilon_{i3}) d\varepsilon_{i3} \right) f(\varepsilon_{i2}) d\varepsilon_{i2} \right) f(\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (17)$$

である。

5.2.1 ε_{i3} に関する定積分

ここで予め ε_{i3} に関する定積分を求めておく。

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i3}} f(\varepsilon_{i3}) d\varepsilon_{i3} = \int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i3}} \exp(-\varepsilon_{i3}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i3})) d\varepsilon_{i3} \quad (18)$$

$$= \left[\int \exp(-\varepsilon_{i3}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i3})) d\varepsilon_{i3} \right]_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i3}} \quad (19)$$

$$= \left[\exp(-\exp(-\varepsilon_{i3})) \right]_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i3}} \quad (20)$$

$$= \exp\left(-\exp(-(\varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i3}))\right) \quad (21)$$

5.2.2 ε_{i2} に関する定積分

同様に ε_{i2} に関する定積分を求めると、

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i2}} \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i3}} f(\varepsilon_{i3}) d\varepsilon_{i3} \right) f(\varepsilon_{i2}) d\varepsilon_{i2} \quad (22)$$

$$= \int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i2}} \exp \left(-\exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i3}) \right) f(\varepsilon_{i2}) d\varepsilon_{i2} \quad (23)$$

$$= \exp \left(-\exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i3}) \right) \int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i2}} f(\varepsilon_{i2}) d\varepsilon_{i2} \quad (24)$$

$$= \exp \left(-\exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i3}) \right) \exp \left(-\exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i2}) \right) \quad (25)$$

を得る。

$$= \exp\left(-\exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i2}) - \exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i3})\right) \quad (26)$$

$$= \exp\left(-\exp(-\varepsilon_{i1}) \exp(-U_{i1} + U_{i2}) - \exp(-\varepsilon_{i1}) \exp(-U_{i1} + U_{i3})\right) \quad (27)$$

$$= \exp\left(-\exp(-\varepsilon_{i1}) (\exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))\right) \quad (28)$$

5.2.3 多項ロジットモデルの p_{i1} の値

(17) に (28) を代入すると、

$$p_{i1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\exp(-\varepsilon_{i1})(\exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))\right) \exp(-\varepsilon_{i1}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1})) d\varepsilon_{i1} \quad (29)$$

第二因数を第三因数と入れ替え、

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\exp(-\varepsilon_{i1})(\exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))\right) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1})) \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (30)$$

指数法則により第一因数と第二因数をまとめ、

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\exp(-\varepsilon_{i1}) - \exp(-\varepsilon_{i1}) (\exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))\right) \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (31)$$

第一因数の冪数の共通因子を掃きだすと、

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))(-\exp(-\varepsilon_{i1}))\right) \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (32)$$

である。

ここで

$$\delta = -\exp(-\varepsilon_{i1}) \text{ とおく} \quad (33)$$

すると積分区間の上端と下端は、

$$\varepsilon_1 = +\infty \quad \text{のとき} \quad \delta = -\exp(-(+\infty)) = 0 \quad (34)$$

$$\varepsilon_1 = -\infty \quad \text{のとき} \quad \delta = -\exp(-(-\infty)) = -\infty \quad (35)$$

(33) を微分すると、

$$\frac{d\delta}{d\varepsilon_{i1}} = \exp(-\varepsilon_{i1}) \quad (36)$$

なので、形式的に分数に見立てて分母を払い

$$d\delta = \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad \text{とする。} \quad (37)$$

置換積分の定理より (32) は

$$\int_{-\infty}^0 \exp\left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))\delta\right) d\delta \quad (38)$$

$$= \left[\int \exp\left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))\delta\right) d\delta \right]_{-\infty}^0 \quad (39)$$

$$= \left[\frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})} \exp((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3}))\delta) \right]_{-\infty}^0 \quad (40)$$

ここで上端の不定積分をもとめると、

$$\frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})} \exp\left(\left(1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})\right)(0)\right) \quad (41)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})} \quad (42)$$

同様に下端の不定積分をもとめると、

$$\frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})} \exp\left(\left(1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})\right)(-\infty)\right) = 0 \quad (43)$$

したがって求める定積分は、

$$p_{i1} = \frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}) + \exp(-U_{i1} + U_{i3})} \frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1})} \quad (45)$$

$$= \frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i2}) + \exp(U_{i3})} \quad (46)$$

5.3 多項ロジットの選択確率 (p_{ij})

個人 i が J 個ある選択肢から 選択肢 j を選ぶ選択確率を p_{ij} であらわす。選択肢 j の確率的な効用に第一種極値分布を仮定すると選択肢 j の選択確率 p_{ij} は以下の式であらわすことができる。このモデルを多項ロジットモデルと呼ぶ。

$$p_{ij} = \frac{\exp(U_{ij})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i2}) + \cdots + \exp(U_{iJ})} \quad (47)$$

$$= \frac{\exp(U_{ij})}{\sum_{j=1}^J \exp(U_{ij})} \quad (48)$$

5.3.1 選択肢 j の確定的な効用 U_{ij}

- i を個人を識別する添え字、 j を選択肢を識別する添え字、 k を独立変数を識別する添え字とし、独立変数を x_{ijk} であらわす。
- 確定的な効用を U_{ij} であらわし、選択肢間においてパラメータは共通であると仮定し、定数項を持たせずに¹⁾、パラメータを係数とする独立変数の和で定式化する。

$$U_{ij} = \beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3} + \cdots + \beta_K x_{ijK} \quad (49)$$

1) 定数項を持たない根拠は二項ロジットと同様である。

5.3.2 $K = 3$ の独立変数をもつ $J = 3$ の多項ロジットモデル

$$p_{ij} = \frac{\exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})}{\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})} \quad (50)$$

ここで、

x_{ij1} を選択肢 2 のとき 1、それ以外るとき 0 を取るダミー変数、

x_{ij2} を選択肢 3 のとき 1、それ以外るとき 0 を取るダミー変数、

x_{ij3} をそれぞれの選択肢における同種のマーケティング変数とする。

すると、選択肢 1 の選択確率 p_{i1} は

$$p_{i1} = \frac{\exp(\beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12} + \beta_3 x_{i13})}{\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})} \quad (51)$$

$$= \frac{\exp(\beta_1(0) + \beta_2(0) + \beta_3 x_{i13})}{\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})} \quad (52)$$

$$= \frac{\exp(\beta_3 x_{i13})}{\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})} \quad (53)$$

同様に p_{i2} , p_{i3} は

$$p_{i2} = \frac{\exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23})}{\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})} \quad (54)$$

$$p_{i3} = \frac{\exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})}{\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})} \quad (55)$$

である。

問題 VI-5 - 5

(53)(54)(55) の分母

$$\sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3})$$

を $\sum$ を使わずにあらわしなさい。

解例 VI-5 - 5

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2} + \beta_3 x_{ij3}) \\ &= \exp(\beta_3 x_{i13}) + \exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23}) + \exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33}) \end{aligned}$$

5.4 $(x_{ij3} - x_{i13})$ を独立変数とする p_{ij} の形

(53) において、 $(x_{i23} - x_{i13})$, $(x_{i33} - x_{i13})$ を変数と見立てて計算する。

$$p_{i1} = \frac{\exp(\beta_3 x_{i13})}{\exp(\beta_3 x_{i13}) + \exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23}) + \exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})} \quad (56)$$

$$= \frac{1}{\exp(\beta_3 x_{i13} - \beta_3 x_{i13}) + \exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23} - \beta_3 x_{i13}) + \exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33} - \beta_3 x_{i13})} \quad (57)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_3(x_{i23} - x_{i13})) + \exp(\beta_2 + \beta_3(x_{i33} - x_{i13}))} \quad (58)$$

同様に (54) を計算すると、

$$p_{i2} = \frac{\exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23})}{\exp(\beta_3 x_{i13}) + \exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23}) + \exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})} \quad (59)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-\beta_1 - \beta_3 x_{i23} + \beta_3 x_{i13}) + \exp(-\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 x_{i23} + \beta_3 x_{i33})} \quad (60)$$

分母第二項と第三項を括弧でくくり共通因数を掃き出すと

$$= \frac{1}{1 + \left(1 + \exp(\beta_2 - \beta_3 x_{i13} + \beta_3 x_{i33})\right) \exp(-\beta_1 - \beta_3 x_{i23} + \beta_3 x_{i13})} \quad (61)$$

$$= \frac{1}{1 + \left(1 + \exp(\beta_2 + \beta_3(x_{i33} - x_{i13}))\right) \exp(-(\beta_1 + \beta_3(x_{i23} - x_{i13})))} \quad (62)$$

問題 VI-5 - 6

$$\frac{\exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})}{\exp(\beta_3 x_{i13}) + \exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23}) + \exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})}$$

において、 $w_1 = x_{i23} - x_{i13}$, $w_2 = x_{i33} - x_{i13}$ とする。 w_1, w_2 を使ってあらわしなさい。

解例 VI-5 - 6

$$\frac{\exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})}{\exp(\beta_3 x_{i13}) + \exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23}) + \exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})}$$

$\exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i33})$ で約分する

$$= \frac{1}{\exp(-\beta_2 + \beta_3 x_{i13} - \beta_3 x_{i33}) + \exp(\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 x_{i23} - \beta_3 x_{i33}) + 1}$$

分母の項の順序を入れ替え、分母第二項並びに第三項をくくり

$$= \frac{1}{1 + (\exp(-\beta_2 + \beta_3 x_{i13} - \beta_3 x_{i33}) + \exp(\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 x_{i23} - \beta_3 x_{i33}))}$$

分母第二項から $\exp(-\beta_2 + \beta_3 x_{i13} - \beta_3 x_{i33})$ を掃き出すと

$$= \frac{1}{1 + (\exp(-\beta_2 - (\beta_3 x_{i33} - \beta_3 x_{i13}))) (1 + \exp(\beta_1 + \beta_3 x_{i23} - \beta_3 x_{i13}))}$$

冪数部分から β_3 を掃き出すと

$$= \frac{1}{1 + \exp(-\beta_2 - \beta_3(x_{i33} - x_{i13})) (1 + \exp(\beta_1 + \beta_3(x_{i23} - x_{i13})))}$$

$w_1 = x_{i23} - x_{i13}$, $w_2 = x_{i33} - x_{i13}$ なので

$$= \frac{1}{1 + (1 + \exp(\beta_1 + \beta_3 w_1)) \exp(-(\beta_2 + \beta_3 w_2))}$$

である。

(53)(54)(55) は $(x_{ij3} - x_{i13})$ を変数と見立てると

$$p_{i1} = \frac{1}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_3(x_{i23} - x_{i13})) + \exp(\beta_2 + \beta_3(x_{i33} - x_{i13}))} \quad (58)$$

$$p_{i2} = \frac{1}{1 + \exp\left(-(\beta_1 + \beta_3(x_{i23} - x_{i13}))\right)\left(1 + \exp(\beta_2 + \beta_3(x_{i33} - x_{i13}))\right)} \quad (62)$$

$$p_{i3} = \frac{1}{1 + \left(1 + \exp(\beta_1 + \beta_3(x_{i23} - x_{i13}))\right)\exp\left(-(\beta_2 + \beta_3(x_{i33} - x_{i13}))\right)} \quad (63)$$

とあらわすことができる。

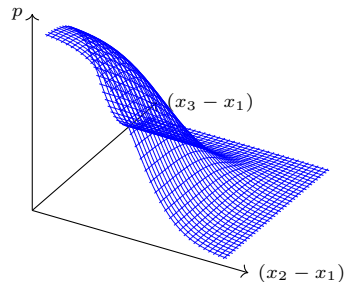
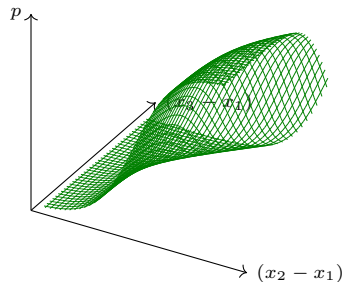
図1 多項ロジットの p_1 図2 多項ロジットの p_2 

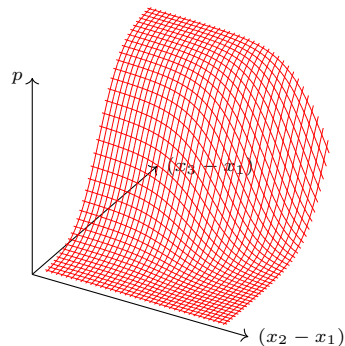
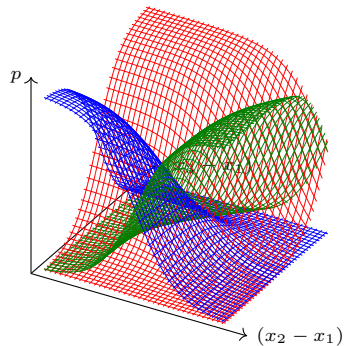
図3 多項ロジットの p_3 

図4 多項ロジットの選択確率



5.5 第三の選択肢による影響

5.5.1 二項ロジットにおける選択確率の比

二項ロジットにおける選択肢 j の選択確率を $p_{j|1,2}$ 、選択肢 j の確定的効用を U_j とあらわす。

$$p_{1|1,2} = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2)} \quad (64)$$

$$p_{2|1,2} = \frac{\exp(U_2)}{\exp(U_1) + \exp(U_2)} \quad (65)$$

ここで $p_{1|1,2}$ と $p_{2|1,2}$ の比を取ると

$$\frac{p_{1|1,2}}{p_{2|1,2}} = \frac{\left(\frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2)} \right)}{\left(\frac{\exp(U_2)}{\exp(U_1) + \exp(U_2)} \right)} = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_2)} \quad (66)$$

である。

5.5.2 第三の選択肢が追加されたときの選択確率の比

選択肢が 3 つの時の選択確率を $p_{j|1,2,3}$ とあらわす。

$$p_{1|1,2,3} = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \quad (67)$$

$$p_{2|1,2,3} = \frac{\exp(U_2)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \quad (68)$$

ここでも $p_{1|1,2,3}$ と $p_{2|1,2,3}$ の比を取ると

$$\frac{p_{1|1,2,3}}{p_{2|1,2,3}} = \frac{\left(\frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \right)}{\left(\frac{\exp(U_2)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \right)} = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_2)} \quad (69)$$

である。

5.5.3 無関係な選択対象からの独立性と多項ロジットの適用領域

- ロジットモデルに従えば、選択肢 3 が追加されても選択肢 1 と選択肢 2 の選択確率の比は影響を受けない。
- 選択肢 3 が追加されたとしても、選択肢 3 が選ばれる以外は、選択結果は変わらないことを意味している。
- このことを無関係な選択対象からの独立性と呼ぶ。
- ロジットモデルでは選択肢は同質であることを想定している。
- そのため、ロジットモデルでは選択肢の同質性が満たされない場合を上手く説明できない。
- この性質を利用し多項ロジットは市場の階層性の分析に利用される。

5.5.4 多項ロジットモデルが成り立たない状況

選択肢が3つの場合を考える。選択肢 j の全体効用を V_j とする。 $V_1 \geq V_2$ の事象を A 、 $V_1 \geq V_3$ の事象を B とする。選択確率 $\Pr(A)$, $\Pr(B)$, $\Pr(A \cap B)$ がそれぞれロジットモデルに従うとすると

$$\Pr(A) = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2)} \quad (70)$$

$$\Pr(B) = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_3)} \quad (71)$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \quad (72)$$

である。

したがって事象 B を条件とする事象 A の条件付き確率は

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\left(\frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \right)}{\left(\frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_3)} \right)} \quad (73)$$

$$= \frac{\exp(U_1) + \exp(U_3)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \quad (74)$$

である。

ここで、事象 A が事象 B に影響されない場合は、

$$\Pr(A) = \Pr(A \mid B) \quad (75)$$

が成り立つ。このとき事象 A と事象 B は独立な事象である。

したがって、

$$\frac{\exp(U_1)}{\exp(U_1) + \exp(U_2)} = \frac{\exp(U_1) + \exp(U_3)}{\exp(U_1) + \exp(U_2) + \exp(U_3)} \quad (76)$$

が成り立つ場合、事象 A と事象 B は独立な事象である。

ここで選択肢 j の確定的な効用を

$$U_j = \beta x_j \quad : j = 1, 2, 3 \quad (77)$$

とすると、

$$P(A) = \frac{\exp(\beta x_1)}{\exp(\beta x_1) + \exp(\beta x_2)} \quad (78)$$

$$P(A | B) = \frac{\exp(\beta x_1) + \exp(\beta x_3)}{\exp(\beta x_1) + \exp(\beta x_2) + \exp(\beta x_3)} \quad (79)$$

ここで (79) において $x_3 > 0$ とすると、分子第 2 項並びに分母第 3 項に限り

$$\exp(\beta x_3) \rightarrow 0 \implies \beta x_3 \rightarrow -\infty \quad (80)$$

$$\implies \beta \rightarrow -\infty \quad (81)$$

ならば (76) は成り立つ。

これは、選択肢においてパラメータは共通であるとの仮定が満たされない状況を意味している。

5.5.5 ロジットモデルの仮定再考

ロジットモデルでは確定的な効用におけるパラメータは全ての選択肢において共通であるとの仮定を置いている。

$$U_{i1} = \beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12} + \beta_3 x_{i13} \quad (82)$$

$$U_{i2} = \beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i22} + \beta_3 x_{i23} \quad (83)$$

$$U_{i3} = \beta_1 x_{i31} + \beta_2 x_{i32} + \beta_3 x_{i33} \quad (84)$$

ここで、 x_{ij1} を選択肢 2 ダミー， x_{ij2} を選択肢 3 ダミーとする。

すると 各選択肢の効用の確定的な部分は

$$U_{i1} = \beta_3 x_{i13} \quad (85)$$

$$U_{i2} = \beta_1 + \beta_3 x_{i23} \quad (86)$$

$$U_{i3} = \beta_2 + \beta_3 x_{i33} \quad (87)$$

である。このとき、 β_1 , β_2 はそれぞれの選択肢の固有の魅力度であり、確定的効用を一定数シフトさせる値である。

一方で、マーケティング変数 x_{ij3} のもたらす各選択肢の確定的な効用への影響が異なると仮定する。このとき、選択肢 2 ダミー、選択肢 3 ダミーを用いず、それぞれの選択肢ごとに定数項を持たせ、各選択肢の確定的な部分をあらわすと、

$$U_{i1} = \alpha_1 + \beta_{13}x_{i13} \quad (88)$$

$$U_{i2} = \alpha_2 + \beta_{23}x_{i23} \quad (89)$$

$$U_{i3} = \alpha_3 + \beta_{33}x_{i33} \quad (90)$$

である。

これらを用いて選択確率を記述すると、

$$p_{i1} = \frac{\exp(\alpha_1 + \beta_{13}x_{i13})}{\exp(\alpha_1 + \beta_{13}x_{i13}) + \exp(\alpha_2 + \beta_{23}x_{i23}) + \exp(\alpha_3 + \beta_{33}x_{i33})} \quad (91)$$

$$= \frac{\exp(\alpha_1) \exp(\beta_{13}x_{i13})}{\exp(\alpha_1) \exp(\beta_{13}x_{i13}) + \exp(\alpha_2) \exp(\beta_{23}x_{i23}) + \exp(\alpha_3) \exp(\beta_{33}x_{i33})} \quad (92)$$

$$= \frac{\exp(\beta_{13}x_{i13})}{\exp(\beta_{13}x_{i13}) + \exp(\alpha_2 - \alpha_1) \exp(\beta_{23}x_{i23}) + \exp(\alpha_3 - \alpha_1) \exp(\beta_{33}x_{i33})} \quad (93)$$

となる。ここで、

$$\beta_{20} = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (94)$$

$$\beta_{30} = \alpha_3 - \alpha_1 \quad (95)$$

とあらわすと、

$$p_{i1} = \frac{\exp(\beta_{13}x_{i13})}{\exp(\beta_{13}x_{i13}) + \exp(\beta_{20})\exp(\beta_{23}x_{i23}) + \exp(\beta_{30})\exp(\beta_{33}x_{i33})} \quad (96)$$

$$= \frac{\exp(\beta_{13}x_{i13})}{\exp(\beta_{13}x_{i13}) + \exp(\beta_{20} + \beta_{23}x_{i23}) + \exp(\beta_{30} + \beta_{33}x_{i33})} \quad (97)$$

したがって、効用値の確定的な部分は

$$U_{i1} = \beta_{13}x_{i13} \quad (98)$$

$$U_{i2} = \beta_{20} + \beta_{23}x_{i23} \quad (99)$$

$$U_{i3} = \beta_{30} + \beta_{33}x_{i33} \quad (100)$$

とあらわすことができる。

5.6 まとめ

- ロジットモデルは「独立変数による確定的な効用への影響 (β_k) は、各選択肢において等しい」ことを仮定している。
- 仮定が満たされる場合、3番目の選択肢が増えても、選択肢3が選ばれる場合を除き、選択肢1と選択肢2の選択確率の比は変わらない。
- 独立変数による確定的な効用への影響 (β_{jk}) が選択肢ごとに異なるとき、多項ロジットモデルは『無関係な選択対象からの独立性』を満たさない。
- この性質を利用し多項ロジットモデルは市場の階層性の分析に適用される。