第 VI 部　Logit model

4　確定的部分の仮定

ポイント

- 確定的部分の仮定
- ロジスティックモデルとの関係
- 定数項の意味

4.1　はじめに

- 最終的に出てきた形には理由があります。
- 結論は仮定によってもたらされます。
- 理由を理解すると結論を説明するときの表現が変わります。

4.1.1 ロジスティックモデルの確認

z_i を独立変数、y_i を 1 か 0 しかとらないダミー変数とし、$y_i = 1$ の確率を p_i とする。$y_i = 1$ の時の確率 p_i を以下の式で定義する。

$$p_i = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2 z_i))} \tag{1}$$

(1) 式において、α_1 は z 軸方向の平行移動パラメータであり、 α_2 は z 軸方向の拡大縮小のパラメータである。

4.1.2　指数法則の確認

ネイピア数を底として冪乗の演算を確認する。

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \tag{2}$$

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \tag{3}$$

$$\exp(a-a) = \exp(a)\exp(-a) = \exp(a)\frac{1}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1 \tag{4}$$

4.1.3 ロジットモデルの効用

i を個人を識別する添え字とし、j を選択肢を識別する添え字とする。選択肢 j の効用全体 (V_{ij}) を確定的な部分 (U_{ij}) と確率的な部分 (ε_{ij}) の和として定義する。

- 個人 i における選択肢 j の効用全体を V_{ij} とする。
- 個人 i における選択肢 j の効用の確定的な部分を U_{ij} とする。
- 個人 i における選択肢 j の効用の確率的な部分を ε_{ij} とする。

$$V_{ij} = U_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{5}$$

4.2 二項ロジットモデル

ロジットモデルでは選択肢の数はあらかじめ決まっていると仮定している。選択肢が 2 つの場合を二項ロジットモデルという。ここでは二項ロジットモデルを使って考察を行う。

定理 VI–3 – 2

選択肢 j の効用の確率的な部分 (ε_{ij}) が独立に第一種極値分布に従うと仮定すると、個人 i が、二つの選択肢から選択肢 j を選択する確率 (p_{ij}) は二項ロジットモデル

$$p_{ij} = \frac{\exp(U_{ij})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i2})} \tag{6}$$

にしたがう。

4.3　確定的な部分の仮定

ロジットモデルでは選択肢 j の確定的な部分を独立変数によって説明できる部分であるとし、選択肢ごとに同種のマーケティング変数の対を仮定している。さらにパラメータ (β) は両選択肢において共通であるとし、定数項を持たせず、独立変数とパラメータの積として定式化している。もっとも単純なものとして 1 対の独立変数からなるモデルから説明を開始する。

$$U_{i1} = \beta x_{i1} \tag{7}$$

$$U_{i2} = \beta x_{i2} \tag{8}$$

4.3.1　確定的な部分に定数項が含まれないわけ

選択肢 j の効用の確定的な部分に定数項が含まれない理由を説明するためにあえて定数項を含んでモデルを記述してみる。両選択肢においてパラメータが共通であるとし各選択肢の効用を記述する。

$$U_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} \tag{9}$$

$$U_{i2} = \beta_0 + \beta_1 x_{i2} \tag{10}$$

これを使い定理 VI–3 – 2 に基づき選択肢 1 の選択確率を記述する。

$$p_{i1} = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1})}{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1}) + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i2})} \tag{11}$$

指数法則を使い分母分子の各項を積であらわし

$$= \frac{\cancel{\exp(\beta_0)}\ \exp(\beta_1 x_{i1})}{\cancel{\exp(\beta_0)}\ \exp(\beta_1 x_{i1}) + \cancel{\exp(\beta_0)}\ \exp(\beta_1 x_{i2})} \tag{12}$$

約分すると

$$= \frac{\exp(\beta_1 x_{i1})}{\exp(\beta_1 x_{i1}) + \exp(\beta_1 x_{i2})} \tag{13}$$

となる。パラメータが選択肢において共通であるという仮定により、定数項はモデルから除かれてしまう。このことを理由として確定的な部分の定式化において定数項が排除される。

定理 VI–4 – 1

二項ロジットモデルにおいて、それぞれの選択肢の確定的な効用において定数項 β_0 を含み以下のように定義し、

$$U_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_{i1}$$

$$U_{i2} = \beta_0 + \beta_1 x_{i2}$$

選択肢 j の選択確率を記述しても、ロジットモデルから効用の定数項 β_0 は打ち消される。

4.4　ロジットモデルの関数としての「形」

　ロジットモデルによる選択確率をより理解する為に更に式を変形する。

$$p_{i1} = \frac{\exp(\beta x_{i1})}{\exp(\beta x_{i1}) + \exp(\beta x_{i2})} \left(\frac{\exp(-\beta x_{i1})}{\exp(-\beta x_{i1})} \right) \tag{14}$$

分配法則により

$$= \frac{\exp(\beta x_{i1}) \exp(-\beta x_{i1})}{\exp(\beta x_{i1}) \exp(-\beta x_{i1}) + \exp(\beta x_{i2}) \exp(-\beta x_{i1})} \tag{15}$$

指数法則により

$$= \frac{\exp(\beta x_{i1} - \beta x_{i1})}{\exp(\beta x_{i1} - \beta x_{i1}) + \exp(-\beta x_{i1} + \beta x_{i2})} \tag{16}$$

冪数を整理し

$$= \frac{\exp(0)}{\exp(0) + \exp(-\beta(x_{i1} - x_{i2}))} \tag{17}$$

0 乗は 1 なので

$$p_{i1} = \frac{1}{1 + \exp(-\beta(x_{i1} - x_{i2}))} \tag{18}$$

二項ロジットモデルは x_{i1} と x_{i2} の差 $(x_{i1} - x_{i2})$ を独立変数とする定数項を含まないロジスティックモデルに帰着する。

　ロジットモデルにおいても完全分離、準完全分離は当然発生する。

定理 VI–4 – 2

二項ロジットモデル

$$p_{ij} = \frac{\exp(\beta x_{ij})}{\exp(\beta x_{i1}) + \exp(\beta x_{i2})}$$

は、x_{i1} と x_{i2} の差 $(x_{i1} - x_{i2})$ を独立変数とする定数項を含まないロジスティックモデル

$$p_{ij} = \frac{1}{1 + \exp\big(-\beta(x_{i1} - x_{i2})\big)}$$

に帰着する。

4.4.1 ロジットモデルの多変数化

ここで独立変数を一対増やし、独立変数を識別する添え字を k とする。各選択肢の効用は、独立変数とパラメータの積和と仮定し、

$$U_{i1} = \beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12} \tag{19}$$

$$U_{i2} = \beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i22} \tag{20}$$

とする。二対の独立変数を持つ二項ロジットモデルにおける選択肢 1 の選択確率をあらわす。

$$p_{i1} = \frac{\exp(\beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12})}{\exp(\beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12}) + \exp(\beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i22})} \tag{21}$$

$\exp(-(\beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12}))$ を分母分子にかけ

$$= \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12}))\exp(\beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i22})} \tag{22}$$

指数法則により

$$= \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12}) + \beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i22})} \tag{23}$$

分母第二項の冪数内の括弧をはずし

$$= \frac{1}{1 + \exp(-\beta_1 x_{i11} - \beta_2 x_{i12} + \beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i22})} \tag{24}$$

分母第二項の冪数内を括弧でくくり負号を掃きだし

$$= \frac{1}{1+\exp(-(\beta_1 x_{i11} - \beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i12} - \beta_2 x_{i22}))} \tag{25}$$

β_k ごとに括弧でくくり共通因子として β_k を掃きだすと

$$p_{i1} = \frac{1}{1+\exp(-(\beta_1(x_{i11} - x_{i21}) + \beta_2(x_{i12} - x_{i22})))} \tag{26}$$

二対の独立変数を持つ二項ロジットモデルは対応する独立変数の差 $(x_{i1k} - x_{i2k})$ を独立変数とする定数項を持たないロジスティックモデルである。したがって、交互作用の分析なども同様に行うことができる。

　また、ロジットモデルにおいても多重共線性は当然発生する。

4.4.2 選択肢 2 固有の魅力度

独立変数にダミー変数を用いることで質的なデータを扱う事ができることもロジスティックモデルと同様である。ここで (26) 式において $x_{i11} = 0,\ x_{i21} = 1$ とするダミー変数を採用する。このダミー変数を「選択肢 2 ダミー」とよぶ。すると選択肢 1 の選択確率 p_{i1} は

$$
\begin{aligned}
p_{i1} &= \frac{1}{1 + \exp\Big(- \big(\beta_1(0-1) + \beta_2(x_{i12} - x_{i22})\big)\Big)} && (27) \\
&= \frac{1}{1 + \exp\Big(- \big(- \beta_1 + \beta_2(x_{i12} - x_{i22})\big)\Big)} && (28)
\end{aligned}
$$

である。この時、(28) 式における β_1 を選択肢 2 固有の魅力度とよぶ。

4.4.3　選択肢 2 固有の魅力度と選択肢 1 の選択確率の関係

(28) 式において、

$$
\begin{aligned}
\beta_1 > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{分母第二項冪数が大きくなり} \\
&\Longrightarrow \quad \text{分母第二項が大きくなり} \\
&\Longrightarrow \quad \text{分母が大きくなり} \\
&\Longrightarrow \quad \text{選択確率 } p_{i1} \text{が小さくなる。}
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\beta_1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{選択確率 } p_{i1} \text{が大きくなる。}
$$

4.5 ロジスティックモデルと二項ロジットモデルの比較

再度ロジスティックモデル (1) と二項ロジットモデル (28) を比較する

$$p_i = \frac{1}{1+\exp\bigl(-(\alpha_1+\alpha_2 z_i)\bigr)} \tag{1}$$

$$p_{i1} = \frac{1}{1+\exp\Bigl(-\bigl(-\beta_1+\beta_2(x_{i12}-x_{i22})\bigr)\Bigr)} \tag{28}$$

ここで $z_i = (x_{i12} - x_{i22})$，$\alpha_1 = -\beta_1$，$\alpha_2 = \beta_2$ とすると両式は同じ式であり、二項ロジットは対応する独立変数の差を独立変数とし、定数項を選択肢 2 固有の魅力度に負号をつけたものとするロジスティックモデルに帰着する。

定理 VI–4 – 3

二項ロジットモデル

$$p_{ij} = \frac{\exp(\beta_1 x_{ij1} + \beta_2 x_{ij2})}{\exp(\beta_1 x_{i11} + \beta_2 x_{i12}) + \exp(\beta_1 x_{i21} + \beta_2 x_{i22})}$$

において、x_{ij1} を選択肢 2 ダミーとし、β_1 を選択肢 2 の魅力度と呼ぶと、二項ロジットは対応する独立変数の差を独立変数とし、定数項を選択肢 2 固有の魅力度に負号をつけたものとするロジスティックモデルに帰着する。

4.6 まとめ

- 効用の確定的部分は定数項を持たない独立変数の線型結合。
- パラメータは選択肢において共通。
- 上記の仮定によりロジットモデルは対応する独立変数の差 $(x_{i1k} - x_{i2k})$ を独立変数とするロジスティックモデルに帰着。
- このときの定数項に負号をつけたものを選択肢 2 固有の魅力度とよぶ。
- ロジスティックモデルで行える分析はロジットモデルにおいても行える。