

第 VI 部 Logit model

3 確率的部分の仮定

ポイント

- 重積分
- 二つから一つを選ぶ確率

- 確率的な部分がある理由

3.1 はじめに

- ロジットモデルはの 2000 年のノーベル経済学賞の授賞理由となったモデルです。
- 自分の分野のノーベル賞の授賞理由を理解できたら素敵だと思いませんか？

定理 VI-2-4(積分の平均値の定理)

$f(x)$ が $[a, b]$ で連続であれば

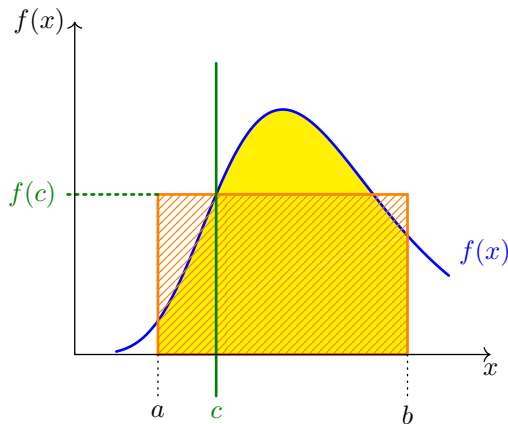
$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c) \quad (1)$$

であって

$$a < c < b \quad (2)$$

を満たす c がある。

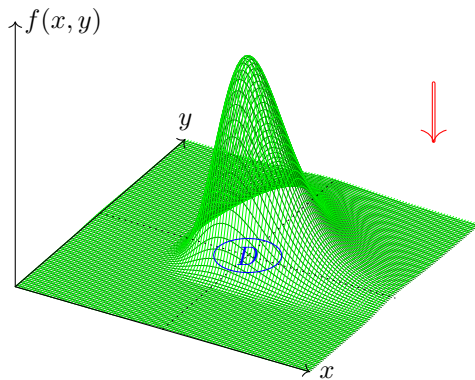
図1 積分の平均値の定理



3.2 重積分の定義

2変数関数 $f(x, y)$ の定積分について説明する。2次元平面内の連続な閉曲線で囲まれた有界な閉集合を D とし関数 $f(x, y)$ は領域 D で連続とする。

図2 関数 $f(x, y)$ と領域 D

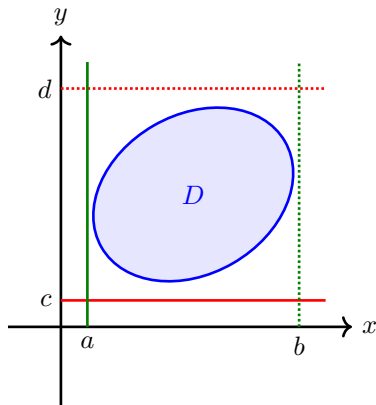


領域 D をその中に含む長方形領域

$$[a, b] \times [c, d] \quad (3)$$

をとる。

図3 領域 D と $[a, b] \times [c, d]$



区間 $[a, b]$ を m 個に分割してその分点を小さい方から順に

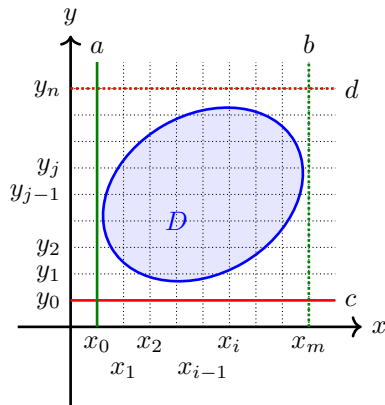
$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b \quad (4)$$

とし、区間 $[c, d]$ を n 個に分割してその分割点を小さい方から順に

$$c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = d \quad (5)$$

とする。

図4 $[a, b]$ の分割と $[c, d]$ の分割



この分割によってつくられる各微小長方形

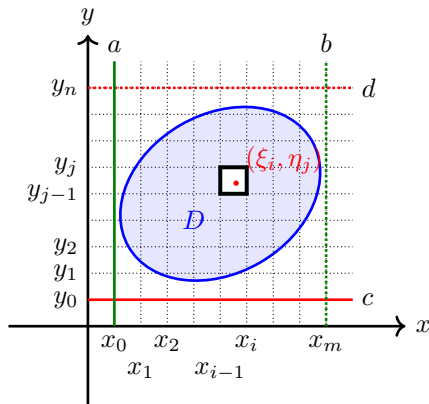
$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

内に1点 (ξ_i, η_j) をとる。

図5 微小長方形内の点 (ξ_i, η_j)



関数 $f^*(x, y)$ を

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ; (x, y) \in D \text{ のとき} \\ 0 & ; (x, y) \notin D \text{ のとき} \end{cases} \quad (6)$$

と定義し、

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f^*(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad (7)$$

をつくる。

$$f^*(\xi_i, \eta_j) = \begin{cases} f(\xi_i, \eta_j) & ; (\xi_i, \eta_j) \in D \text{ のとき} \\ 0 & ; (\xi_i, \eta_j) \notin D \text{ のとき} \end{cases} \quad (8)$$

なので

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (9)$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad (10)$$

とおけば、(7) は

$$S = \sum_{(\xi_i, \eta_j) \in D} \sum f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad (11)$$

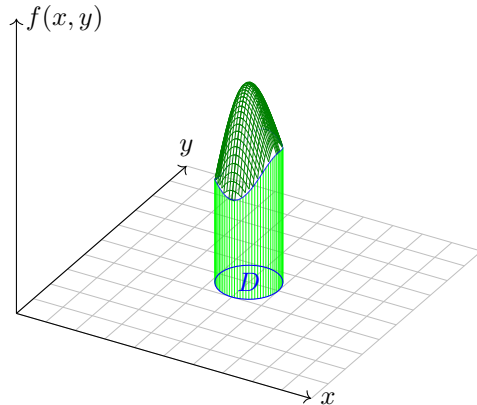
である。ここで全ての $\Delta x_i, \Delta y_j$ が 0 に近付くように分割を進めれば S は一定の値に収束する。

この一定の極限値を

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \quad (12)$$

と書く。この (12) 式を領域 D 上の $f(x, y)$ の定積分と定義する。2 変数関数の定積分を 2 重積分といい、 n 変数の定積分を n 重積分という。またこれらをまとめて『重積分』と総称する。

図 6 $f(x, y)$ の領域 D 上の定積分



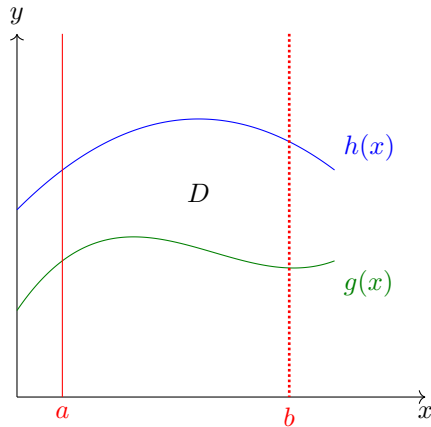
3.3 領域 D の定義

関数 $g(x), h(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とし、かつ、この区間で $g(x) \leq h(x)$ とする。このとき、領域 D を

$$D = \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \right\} \quad (13)$$

で定義する。

図7 関数 $g(x), h(x)$ と領域 D

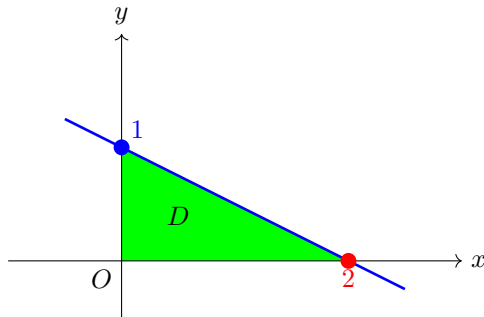


例題 1

以下の領域を図示しなさい。

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2} \right\} \quad (14)$$

解法

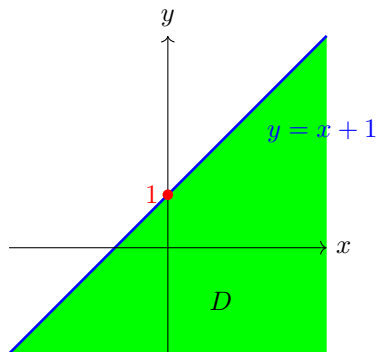


問題 VI-3-1

以下の領域を図示しなさい。

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\infty \leq x \leq +\infty, -\infty \leq y \leq x + 1 \right\}$$

解例 VI-3-1



定理 VI-3-1(重積分の定理)

関数 $g(x), h(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とし、かつ、この区間で $g(x) \leq h(x)$ とする。このとき区間 D を

$$D = \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x) \right\} \quad (15)$$

で定義すれば、 D 上の連続関数 $f(x, y)$ に対して

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad (16)$$

が成立する。

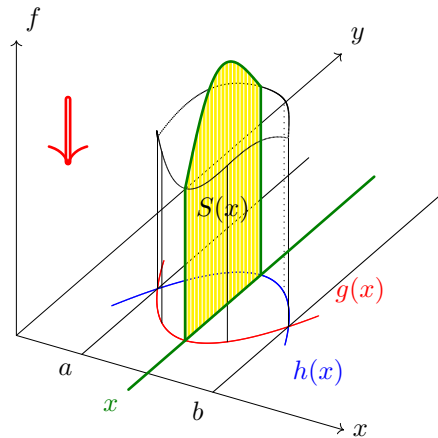
証明

$$S(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \quad (17)$$

とおく。 $g(x), h(x), f(x, y)$ の連続性から $S(x)$ は連続関数であることがわかる。よって積分

$$\int_a^b S(x) dx \quad (18)$$

は存在する。

図 8 $S(x)$ 

区間 $[a, b]$ における $g(x)$ の最小値を c 、 $h(x)$ の最大値を d とすれば

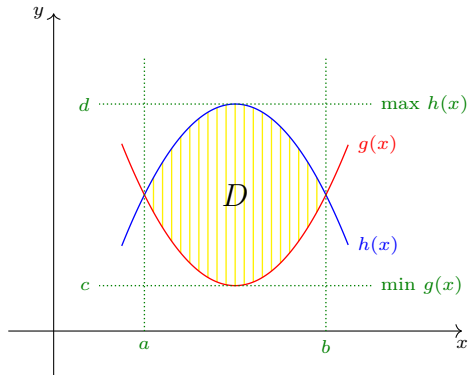
$$c \leq g(x) \leq h(x) \leq d \quad (19)$$

であるから、領域 D は長方形領域

$$[a, b] \times [c, d]$$

に含まれる。

図9 領域 D と $[a, b] \times [c, d]$



区間 $[a, b]$ を分割し、その分割点を

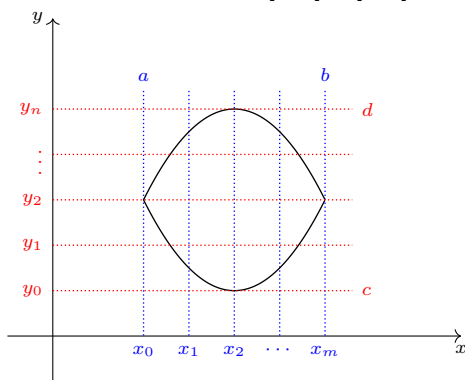
$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b \quad (20)$$

とし、区間 $[c, d]$ を分割し、その分割点を

$$c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = d \quad (21)$$

とする。

図 10 領域 D と $[a, b] \times [c, d]$

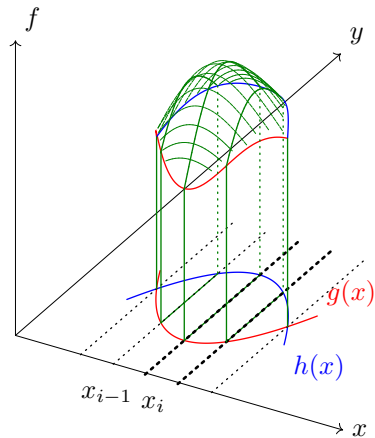


このとき、定積分の区間に関する加法性により

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx \quad (22)$$

となる。

図 11 $[a, b]$ の分割と $S(x)$



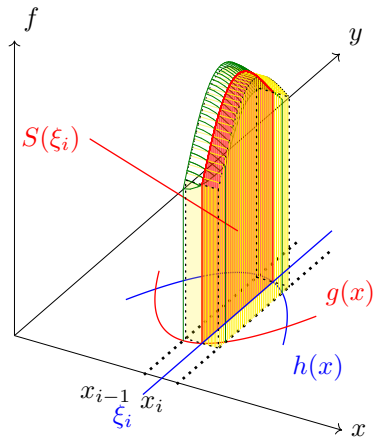
右辺の各積分に平均値の定理を適用すると

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx = S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i \quad (23)$$

となる ξ_i が存在する。

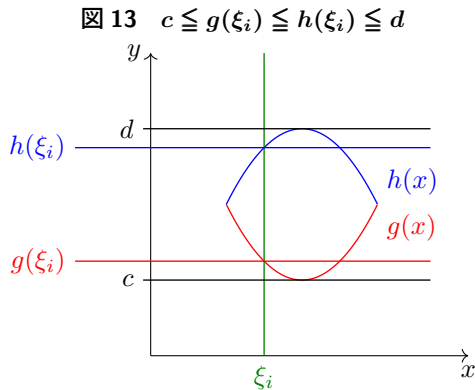
図 12 $S(\xi_i) \times (x_i - x_{i-1})$



この ξ_i に対して

$$c \leq g(\xi_i) \leq h(\xi_i) \leq d \quad (24)$$

が成り立つ。



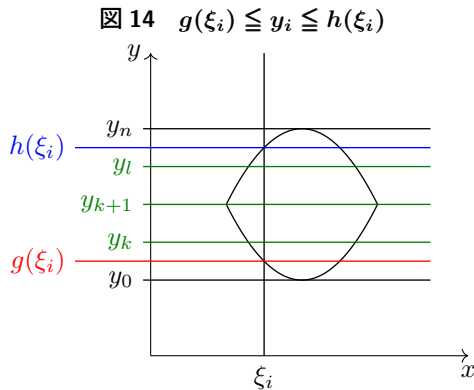
ここで、区間 $[c, d]$ の上記の分割のうちで

$$g(\xi_i) \leq y_i \leq h(\xi_i) \quad (25)$$

となっている分割点だけを取りだすと、

$$y_k, y_{k+1}, \dots, y_l \quad (26)$$

である。



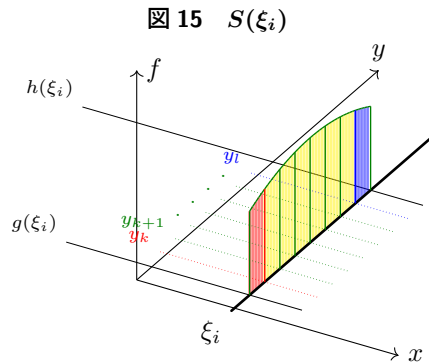
このとき

$$S(\xi_i) = \int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy \quad (27)$$

$$= \int_{g(\xi_i)}^{y_k} f(\xi_i, y) dy$$

$$+ \sum_{j=k+1}^l \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy$$

$$+ \int_{y_l}^{h(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy \quad (28)$$



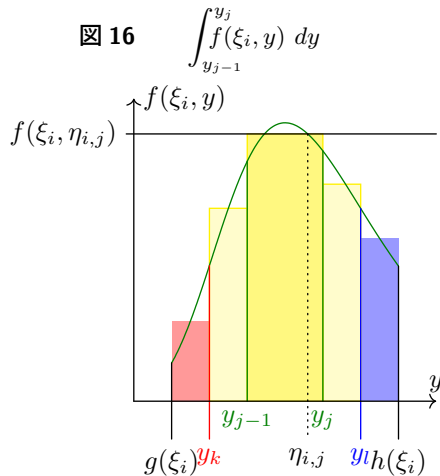
ここで各積分に対し平均値の定理を適用すると

$$\begin{aligned}
 & f(\xi_i, \eta_{ik})(y_k - g(\xi_i)) \\
 & + \sum_{j=k+1}^l f(\xi_i, \eta_{ij})(y_j - y_{j-1}) \\
 & + f(\xi_i, \eta_{i,l+1})(h(\xi_i) - y_l)
 \end{aligned} \quad (29)$$

となる η_{ij} が存在する。明らかに

$$\eta_{ij} \in D \quad ; j = k, k+1, \dots, l \quad (30)$$

である。



よって、(16) 式左辺は、

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b S(x) \, dx = \sum_{i=1}^m S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_{ik})(x_i - x_{i-1})(y_k - g(\xi_i)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=k+1}^l f(\xi_i, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_{i,l+1})(x_i - x_{i-1})(h(\xi_i) - y_l) \end{aligned} \quad (32)$$

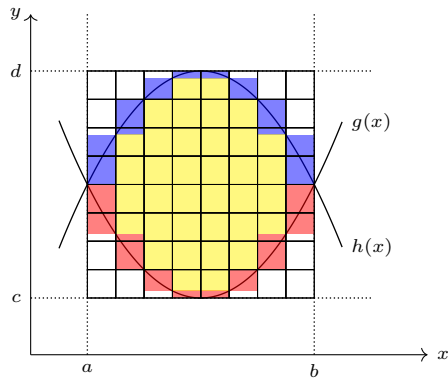
である。ここで分割を進めると、(32) 式第一項と第三項は 0 に収束する。

そして (32) 式第二項は、(16) 式右辺

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (33)$$

に収束する。よって (16) が成立する。(終)

図 17 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=k+1}^l (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$



例題 2

次の重積分を計算しなさい。

$$\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy \quad ; D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2} \right\} \quad (34)$$

解法

重積分の定理より、

$$\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} (x^2 + y) \, dy \right) dx \quad (35)$$

ここで y を積分変数とする定積分を不定積分の差であらわす。

$$= \int_0^2 \left(\left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-\frac{x}{2}} \right) dx \quad (36)$$

不定積分の差を求めると

$$= \int_0^2 \left(\left(x^2 \left(1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 \right) - (0) \right) dx \quad (37)$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{4} \right) \right) dx \quad (38)$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \right) dx \quad (39)$$

次に x を積分変数として積分する。

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^3}{2} + \frac{9x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx \quad (40)$$

$$= \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{3x^3}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^2 \quad (41)$$

$$= \left(-\frac{(2)^4}{8} + \frac{3(2)^3}{8} - \frac{(2)^2}{4} + \frac{(2)}{2} \right) - (0) \quad (42)$$

$$= \left(-\frac{16}{8} + \frac{3 \times 8}{8} - \frac{4}{4} + \frac{2}{2} \right) \quad (43)$$

$$= -2 + 3 - 1 + 1 \quad (44)$$

$$= 1 \quad (45)$$

3.4 ロジットモデルの想定している状況

- 選択肢の数は予め決まっている。
- 選択肢から必ず一つだけを選ぶ。
- 選択は確率的に決まる部分を持つ。
- 選択確率はマーケティング変数などから影響を受ける。

3.4.1 第一種極値分布

第一種極値分布の確率密度関数を以下で定義する。

$$f(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon) \exp(-\exp(-\varepsilon)) \quad (46)$$

また同分布の確率密度関数を積分すると累積分布関数をえる。

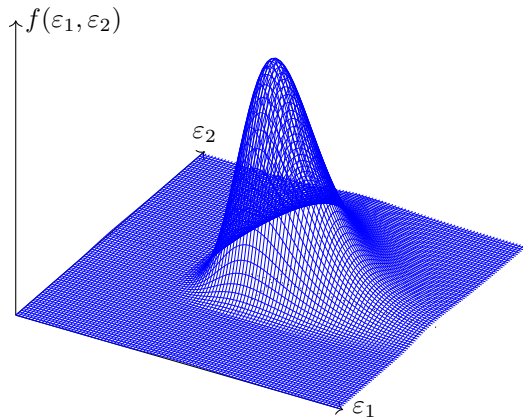
$$F(\varepsilon) = \exp(-\exp(-\varepsilon)) \quad (47)$$

3.4.2 独立な二つの第一種極値分布

ε_1 と ε_2 が独立に第一種極値分布にしたがうとすると ε_1 と ε_2 の同時密度関数はそれぞれの密度関数の積としてあらわすことができる。

$$f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) = \exp(-\varepsilon_1) \exp(-\exp(-\varepsilon_1)) \exp(-\varepsilon_2) \exp(-\exp(-\varepsilon_2)) \quad (48)$$

図 18 独立な二つの第一種極値分布の確率密度関数



3.5 二項ロジットモデルとは

- 選択肢が 2 つのロジットモデル。
- 個人 i が選択肢 j を選ぶ確率を p_{ij} とする。
- 個人 i における選択肢 j の効用を $V_{ij} = U_{ij} + \varepsilon_{ij}$ と定義する。
- $p_{ij} = \frac{\exp(U_{ij})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i2})}$ で定式化される。

3.5.1 ロジットモデルにおける効用の仮定

定義

i を個人を識別する添え字とし、 j を選択肢を識別する添え字とする。効用全体 (V_{ij}) を確定的な部分 (U_{ij}) と確率的な部分 (ε_{ij}) の和として定義する。

- 個人 i における選択肢 j の効用全体を V_{ij} とする。
- 個人 i における選択肢 j の効用の確定的な部分を U_{ij} とする。
- 個人 i における選択肢 j の効用の確率的な部分を ε_{ij} とする。

$$V_{ij} = U_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (49)$$

3.5.2 効用に確率的な部分がある理由

観測値には何らかの誤差があることが想定される。

- 観測されない属性

測定は特定の項目によってのみ行われる。

測定していない項目からの影響は観測者にとって誤差と判断される。

- 測定誤差

どのような計測機器を用いても必ず測定誤差は存在する。

- 関数の同定ミス

仮定したモデルは必ず真のモデルとはずれている。

誤差は観測値と仮定したモデルの差であるから、常に誤差は存在する。

3.5.3 効用の確率的な部分の仮定

- 「効用の確定的な部分」は独立変数によって決まる部分を指している。
- 「選択肢の効用全体」から「効用の確定的な部分」を引いたものが「効用の確率的な部分」である。
- そこで「効用の確率的な部分」は完全に確率的に決まると考える。
- そして、 ε_{ij} は独立に第一種極値分布に従うと仮定する。

3.6 選択確率の定式化

選択肢が 2 つである状況を想定し、選択肢 1 が選ばれる確率を求める。

3.6.1 選択肢 1 が選ばれた理由

- 選択肢 1 の効用 (V_{i1}) が選択肢 2 の効用 (V_{i2}) 以上だったから。
- 選択肢 1 を選ぶ確率を p_{i1} であらわす。 p_{i1} は選択肢 1 の効用 (V_{i1}) が選択肢 2 の効用 (V_{i2}) 以上である確率である。

$$p_{i1} = \Pr(V_{i1} \geq V_{i2}) \quad (50)$$

3.6.2 ロジットモデルによる定式化

選択確率において、 $V_{ij} = U_{ij} + \varepsilon_{ij}$ なので

$$p_{i1} = \Pr(U_{i1} + \varepsilon_{i1} \geq U_{i2} + \varepsilon_{i2}) \quad (51)$$

$$= \Pr(\varepsilon_{i2} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}) \quad (52)$$

したがって領域 D は

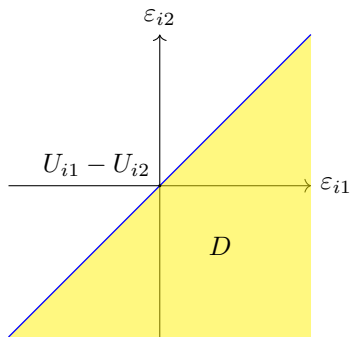
$$D = \left\{ (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}) \mid -\infty \leq \varepsilon_{i1} \leq +\infty, -\infty \leq \varepsilon_{i2} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2} \right\} \quad (53)$$

である。

3.6.3 領域 D の範囲

横軸に ε_{i1} 、縦軸に ε_{i2} を取り、領域 D を図示する。

$$D = \left\{ (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}) \left| \begin{array}{l} -\infty \leq \varepsilon_{i1} \leq +\infty, \\ -\infty \leq \varepsilon_{i2} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2} \end{array} \right. \right\} \quad (54)$$

図 19 領域 D 

ε_{ij} はそれぞれ独立に第一種極値分布に従うので

$$p_{i1} = \iint_D f(\varepsilon_{i1}) f(\varepsilon_{i2}) d\varepsilon_{i2} d\varepsilon_{i1} \\ ; D = \left\{ (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}) \mid -\infty \leq \varepsilon_{i1} \leq +\infty, -\infty \leq \varepsilon_{i2} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2} \right\} \quad (55)$$

$$= \iint_D \exp(-\varepsilon_{i1}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1})) \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) d\varepsilon_{i2} d\varepsilon_{i1} \\ ; D = \left\{ (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}) \mid -\infty \leq \varepsilon_{i1} \leq +\infty, -\infty \leq \varepsilon_{i2} \leq \varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2} \right\} \quad (56)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}} \exp(-\varepsilon_{i1}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1})) \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) d\varepsilon_{i2} \right) d\varepsilon_{i1} \quad (57)$$

この値がいま求めている選択肢 1 を選ぶ確率 p_{i1} である。

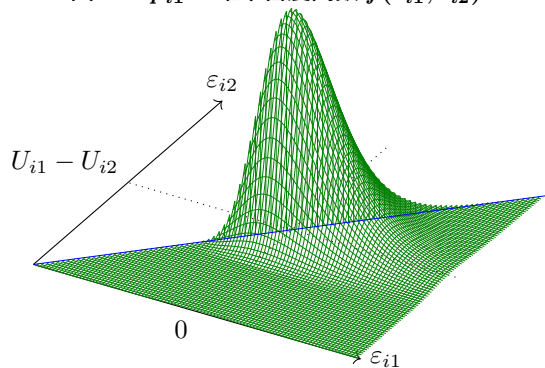
図 20 p_{i1} の確率密度関数 $f(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2})$ 

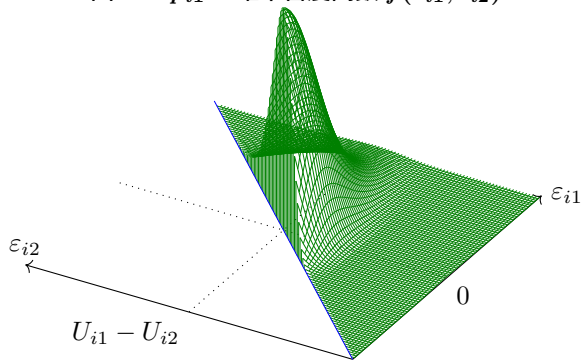
図 21 p_{i1} の確率密度関数 $f(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2})$ 

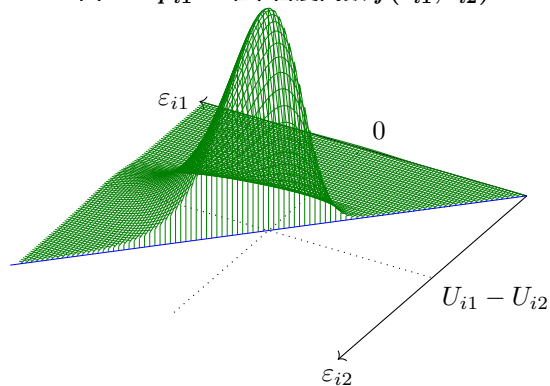
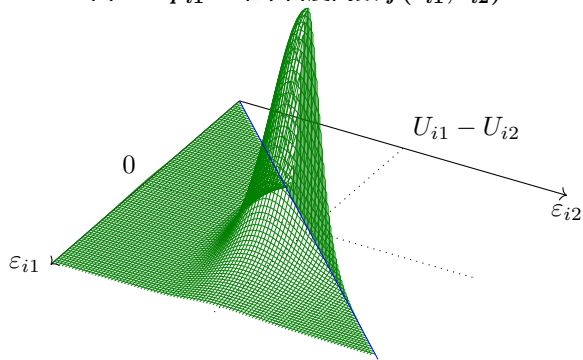
図 22 p_{i1} の確率密度関数 $f(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2})$ 

図 23 p_{i1} の確率密度関数 $f(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2})$ 

3.7 $f(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2})$ の積分

補題 1

ε_{i2} で微分しなさい。

$$y = -\exp(-\varepsilon_{i2}) \quad (58)$$

解法

$$u = -\varepsilon_{i2} \quad (59)$$

$$y = -\exp(u) \quad (60)$$

とおく。それぞれ微分すると

$$\frac{du}{d\varepsilon_{i2}} = -1 \quad (61)$$

$$\frac{dy}{du} = -\exp(u) \quad (62)$$

合成関数の微分より

$$\frac{dy}{d\varepsilon_{i2}} = \frac{dy}{du} \frac{du}{d\varepsilon_{i2}} \quad (63)$$

$$= (-\exp(u))(-1) \quad (64)$$

$$= \exp(-\varepsilon_{i2}) \quad (65)$$

補題 2

不定積分を求めなさい。

$$\int \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) d\varepsilon_{i2} \quad (66)$$

解法

$$y = -\exp(-\varepsilon_{i2}) \quad (67)$$

と置くと、補題 1 より、

$$\frac{dy}{d\varepsilon_{i2}} = \exp(-\varepsilon_{i2}) \quad (68)$$

である。

形式的に左辺を分数に見立てて分母を払うと、

$$dy = \exp(-\varepsilon_{i2}) d\varepsilon_{i2} \quad (69)$$

置換積分の定理より、

$$\begin{aligned} & \int \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) d\varepsilon_{i2} \\ &= \int \exp(y) dy \end{aligned} \quad (70)$$

$$= \exp(y) \quad (71)$$

$$= \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) \quad (72)$$

補題 3

定積分を求めなさい。

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i2}} \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) d\varepsilon_{i2} \quad (73)$$

解法

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i2}} \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) d\varepsilon_{i2} = \left[\int \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) d\varepsilon_{i2} \right]_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i2}} \quad (74)$$

補題 2 により不定積分は

$$= \left[\exp(-\exp(-\varepsilon_{i2})) \right]_{-\infty}^{\varepsilon_{i1}+U_{i1}-U_{i2}} \quad (75)$$

不定積分の差を求めると

$$= \exp \left(- \exp \left(- (\varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}) \right) \right) - \exp \left(- \exp \left(- (-\infty) \right) \right) \quad (76)$$

ここで第 2 項は、

$$\exp \left(- \exp \left(- (-\infty) \right) \right) = \exp \left(- \exp(\infty) \right) = \exp(-\infty) = 0 \quad (77)$$

である。

したがって定積分は

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}} \exp(-\varepsilon_{i2}) \exp \left(- \exp(-\varepsilon_{i2}) \right) d\varepsilon_{i2} = \exp \left(- \exp \left(- (\varepsilon_{i1} + U_{i1} - U_{i2}) \right) \right) \quad (78)$$

$$= \exp \left(- \exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i2}) \right) \quad (79)$$

補題 4

$\alpha \neq 0$ とする。不定積分を求めなさい。

$$\int \exp(\alpha x) dx \quad (80)$$

解法

$$u = \alpha x \quad (81)$$

とおき、微分すると、

$$\frac{du}{dx} = \alpha \quad (82)$$

を得る。

形式的に左辺を分数に見立てて分母を払い

$$du = \alpha dx \quad (83)$$

とする。ここで

$$\int \frac{\alpha}{\alpha} \exp(\alpha x) dx \quad (84)$$

とすると、置換積分の定理により

$$\int \frac{1}{\alpha} \exp(u) du = \frac{1}{\alpha} \int \exp(u) du \quad (85)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \exp(u) \quad (86)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x) \quad (87)$$

p_{i1} の値

補題 3 により (57) の ε_{i2} に関する定積分は (79) である。そこで (57) に (79) を代入すると

$$p_{i1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i2})) \exp(-\varepsilon_{i1}) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1})) d\varepsilon_{i1} \quad (88)$$

因数の順序を入れ替え

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1})) \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i2})) \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (89)$$

指数法則により第一因数と第二因数を統合

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1}) - \exp(-\varepsilon_{i1} - U_{i1} + U_{i2})) \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (90)$$

第一因数冪数、第二項において指数法則により $\exp(-\varepsilon_{i1})$ を因数として分離

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\exp(-\varepsilon_{i1}) - \exp(-\varepsilon_{i1}) \exp(-U_{i1} + U_{i2})) \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (91)$$

第一因数冪数において共通因子 $-\exp(-\varepsilon_{i1})$ を掃きだし

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}))(-\exp(-\varepsilon_{i1}))\right) \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (92)$$

ここで

$$\delta = -\exp(-\varepsilon_{i1}) \quad \text{とおく} \quad (93)$$

この変数変換により対応する積分区間の下端と上端は

$$\varepsilon_{i1} = -\infty \quad \text{のとき} \quad \delta = -\exp(-(-\infty)) = -\infty \quad (94)$$

$$\varepsilon_{i1} = +\infty \quad \text{のとき} \quad \delta = -\exp(-(+\infty)) = 0 \quad (95)$$

である。(93) を微分すると補題 1 により

$$\frac{d\delta}{d\varepsilon_{i1}} = \exp(-\varepsilon_{i1}) \quad (96)$$

を得る。

左辺を形式的に分数に見立てて分母を払い、

$$d\delta = \exp(-\varepsilon_{i1}) d\varepsilon_{i1} \quad (97)$$

とする。置換積分の定理により (92) は

$$\int_{-\infty}^0 \exp\left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})) \delta\right) d\delta \quad (98)$$

$$= \left[\int \exp\left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})) \delta\right) d\delta \right]_{-\infty}^0 \quad (99)$$

補題 4 より不定積分は

$$= \left[\frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})} \exp\left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})) \delta\right) \right]_{-\infty}^0 \quad (100)$$

不定積分の値

ここで上端の不定積分を求める。

$$\frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})} \exp \left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}))(0) \right) \quad (101)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})} \quad (102)$$

同様に下端の不定積分を求めると

$$\frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})} \exp \left((1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2}))(-\infty) \right) = 0 \quad (103)$$

である。したがって定積分 (100) は上端と下端のそれぞれの不定積分の差なので、

$$p_1 = \frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})} \quad (104)$$

右辺に $\frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1})} = 1$ を乗じ

$$= \frac{1}{1 + \exp(-U_{i1} + U_{i2})} \frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1})} \quad (105)$$

分配法則で分母各項に $\exp(U_{i1})$ を振り分け

$$= \frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i1}) \exp(-U_{i1} + U_{i2})} \quad (106)$$

分母第二項において指数法則により

$$= \frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1}) + \exp(\cancel{U_{i1}} - \cancel{U_{i1}} + U_{i2})} \quad (107)$$

$$= \frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i2})} \quad (108)$$

定理 VI-3-2

選択肢が二つある場合において、選択肢 j の効用の確率的な部分 (ε_{ij}) が独立に第一種極値分布に従うと仮定すると、個人 i が選択肢 j を選択する確率 (p_{ij}) はロジットモデル

$$p_{ij} = \frac{\exp(U_{ij})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i2})} \quad (109)$$

にしたがう。

3.8 まとめ

- 選択肢が 2 個のモデルを 2 項ロジットと呼ぶ。
- 個人 i における選択肢 j の効用全体 (V_{ij}) は確定的な部分 (U_{ij}) と確率的な部分 (ε_{ij}) の和、

$$V_{ij} = U_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

と定義する。

- 確率的な部分に第一種極値分布を仮定すると個人 i の選択肢 1 の選択確率 (p_{i1}) は

$$p_{i1} = \frac{\exp(U_{i1})}{\exp(U_{i1}) + \exp(U_{i2})}$$

である。