

第 VI 部 Logit model

2 確率をあらわす関数

ポイント

- 定積分の定義
- 定積分と不定積分の関係

- 確率密度関数と累積分布関数
- 第一種極値分布

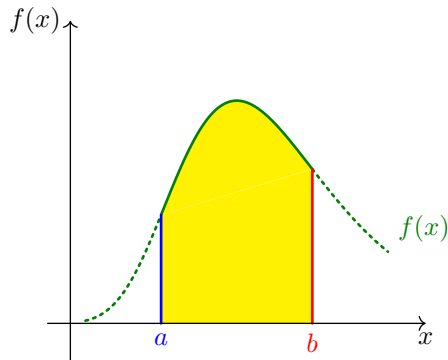
2.1 はじめに

- 確率をあらわす関数は確率密度関数と累積分布関数があります。
- 同じ確率を表現していますが表現方法が異なります。
- 同じものをあらわしているのですから密接な関係があります。

2.1.1 関数に囲まれた範囲の面積

関数 $f(x)$ が与えられたとき、関数 $f(x)$ と x 軸との間の面積を求めることは人類の長年の夢でした。この夢は 17 世紀に入り積分が発見されることによりかないました。今後の議論にとって重要な知見を与える微分積分学の基本定理を説明します。

図 1 求めたい面積



2.2 上限と下限

2.2.1 上界と下界

$\mathbb{R}$ の部分集合 S をとる。このときすべての $x \in S$ に対して $x \leq M$ を満たす実数 M があれば、この M を集合 S の「上界^{じょうかい}」という。 M より大きい数は全て S の上界である。

$\mathbb{R}$ の部分集合 S をとる。このときすべての $x \in S$ に対して $x \geq m$ を満たす実数 m があれば、この m を集合 S の「下界^{かかい}」という。

m より小さい数は全て S の下界である。

2.2.2 有界

集合 S が上界を持つとき、 S は「上に有界」であるといい、下界を持つとき「下に有界」であるという。上界と下界を共に持つとき、 S は「有界」であるという。

集合 S が有界のとき、 S の最小の上界を S の「上限」といい、最大の下界を S の「下限」という。

2.2.3 上限と下限をあらわす記号

集合 S の上限を

$$\sup_{x \in S} x \quad \text{または} \quad \sup S \quad (1)$$

とあらわし、下限を

$$\inf_{x \in S} x \quad \text{または} \quad \inf S \quad (2)$$

とあらわす。

定理 III-3-1

集合 S が上に有界であれば S は上限を持つ。また S が下に有界であれば S は下限を持つ。

定理 III-3-1 と上界, 下界の定義により、集合 S が上界を持てば S は上限を持ち、 S が下界を持てば S は下限を持つ。

2.2.4 総和

定義

数値が n 個あり、 i 番目の数値を x_i とあらわす。全ての x_i を足し合わせた値を『総和』とよび以下の記号であらわす。

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (3)$$

総和の定義から以下の公式を導き出すことができる。

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \quad (5)$$

2.3 定積分の定義

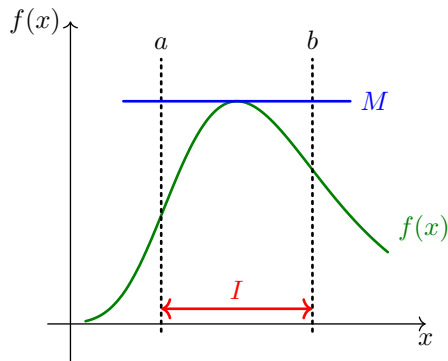
2.3.1 関数 $f(x)$ の上限

閉区間 $I = [a, b]$ で定義された有界な関数を $f(x)$ とする。有界なので、この区間 I 内で $f(x)$ の上限

$$M = \sup_{x \in I} f(x) \quad (6)$$

となる実数 M がある。

図2 区間 I と $f(x)$ の上限 M



2.3.2 区間 I の分割

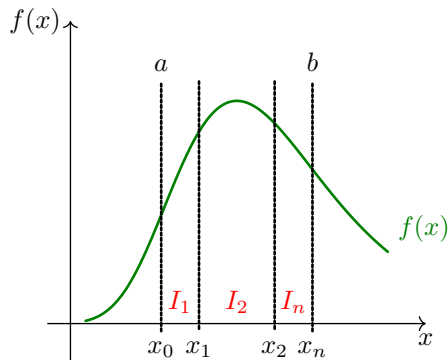
区間 I を n 個の部分区間に分割し、分割点を左から順に、

$$\Delta; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

とする。この分割を『分割 Δ 』とよぶ。各部分区間を

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad ; i = 1, 2, \cdots, n$$

とする。

図3 分割 Δ 

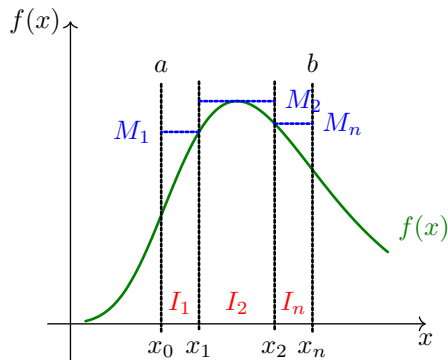
2.3.3 部分区間 I_i の上限 M_i

ここで各部分区間 I_i について

$$M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) \quad (7)$$

とおく。

図4 部分区間 I_i と M_i

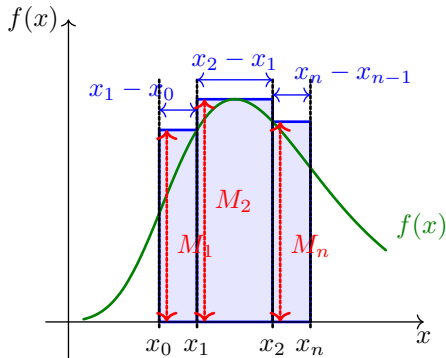


2.3.4 和 S_Δ

分割 Δ に対して、和 S_Δ を

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad (8)$$

と定義する。

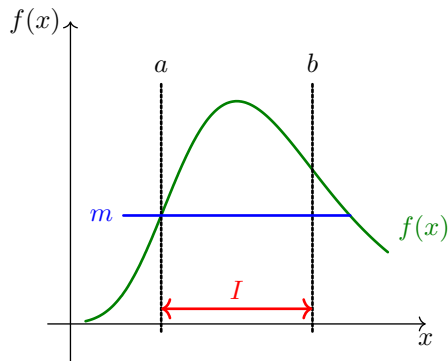
図5 分割 Δ と S_Δ 

2.3.5 関数 $f(x)$ の下限

同様に、関数 $f(x)$ は有界なので区間 I 内で $f(x)$ の下限

$$m = \inf_{x \in I} f(x) \quad (9)$$

となる実数 m がある。

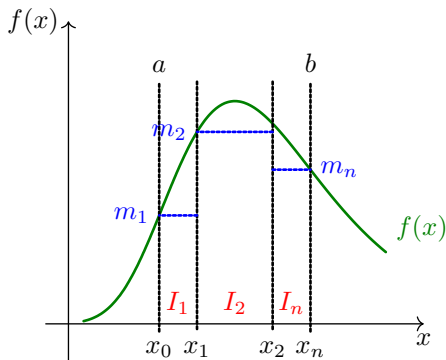
図6 区間 I と $f(x)$ の下限 m 

2.3.6 部分区間 I_i の下限 m_i

ここで、各部分区間 I_i について

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \quad (10)$$

とおく。

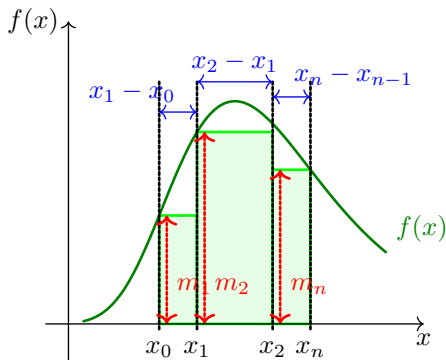
図7 部分区間 I_i と m_i 

2.3.7 和 s_Δ

分割 Δ に対して、和 s_Δ を

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad (11)$$

と定義する。

図8 分割 Δ と s_Δ 

2.3.8 $S_{\Delta} \leq M(b-a)$

どの様に分割しても、

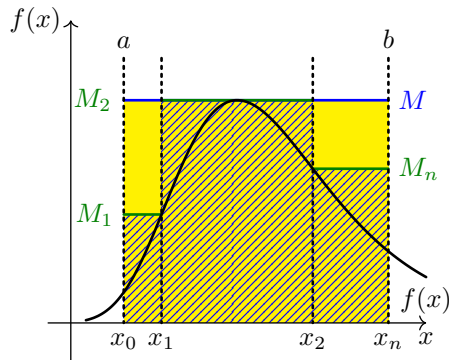
$$M_i \leq M \quad (12)$$

なので

$$S_{\Delta} \leq M(b-a) \quad (13)$$

である。

図9 S_{Δ} と $M(b-a)$



2.3.9 $s_{\Delta} \leq S_{\Delta}$

同様に

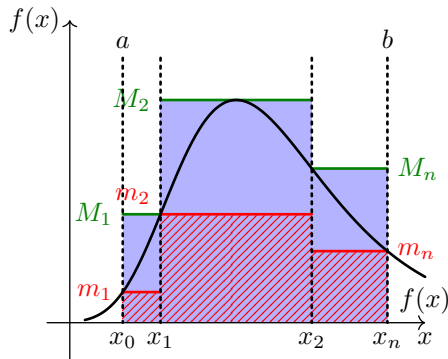
$$m_i \leq M_i \quad (14)$$

なので

$$s_{\Delta} \leq S_{\Delta} \quad (15)$$

である。

図 10 s_{Δ} と S_{Δ}



2.3.10 $m(b-a) \leq s_\Delta$

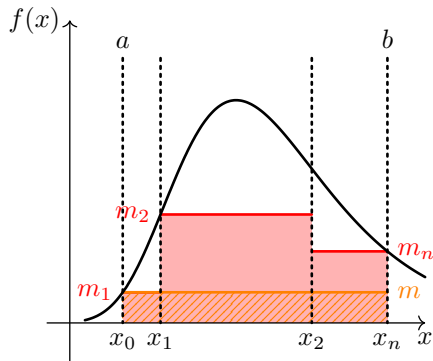
そして

$$m \leq m_i \quad (16)$$

なので

$$m(b-a) \leq s_\Delta \quad (17)$$

である。

図 11 $m(b-a)$ と s_Δ 

2.3.11 S_Δ, s_Δ の範囲

S_Δ, s_Δ は分割 Δ によって一意に確定する。分割 Δ の選び方は何通りもあるが、どんな分割 Δ に対しても

$$m(b-a) \leq s_\Delta \leq S_\Delta \leq M(b-a) \quad (18)$$

が成立する。

したがって、 $m(b-a)$ は S_Δ の下界であり、 $M(b-a)$ は s_Δ の上界である。

2.3.12 上積分

全ての分割 Δ に対する S_Δ の集合は下に有界だから下限を持つ。そこで全ての Δ に関する S_Δ の下限を

$$\inf_{\Delta} S_\Delta = \overline{\int_I f} \quad (19)$$

と置く。この $\overline{\int_I f}$ を $f(x)$ の区間 I における Darboux の「じょうせきぶん上積分」という。

2.3.13 下積分

全ての分割 Δ に対する s_Δ の集合は上に有界だから上限を持つ。そこで全ての Δ に関する s_Δ の上限を

$$\sup_{\Delta} s_\Delta = \underline{\int_I f} \quad (20)$$

と置く。この $\underline{\int_I f}$ を $f(x)$ の区間 I における Darboux の「かせきぶん下積分」という。

定義

区間 $I = [a, b]$ において

$$\overline{\int_I f} = \underline{\int_I f} \quad (21)$$

が成り立つとき、区間 I における $f(x)$ の『定積分』とよび、

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (22)$$

であらわす。

このとき $f(x)$ は区間 $I = [a, b]$ で『積分可能』であるという。このときの a を積分の『下端』といい b を積分の『上端』とよぶ。また $[a, b]$ を『積分区間』とよぶ。

この定積分を Riemann 積分という。これが定積分の正式な定義である。

例題 VI-2 - 1

区間 $I = [a, b]$ で

$$f(x) = \alpha \tag{23}$$

とする。関数 $f(x)$ の区間 I における定積分を求めよ。

解法 VI-2-1

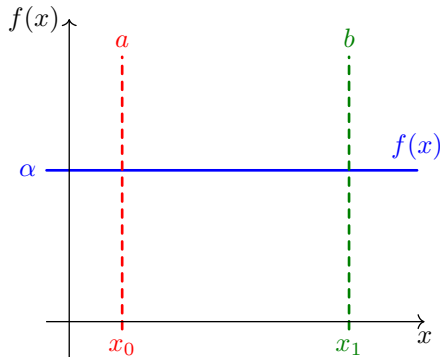
区間 I を分割することなく $n = 1$ とすると、

$$M_1 = \sup_{x \in I_1} f(x) = \alpha \quad (24)$$

$$m_1 = \inf_{x \in I_1} f(x) = \alpha \quad (25)$$

$$I_1 = [a, b] \quad (26)$$

図 12 $\int_a^b \alpha \, dx$



なので

$$\overline{\int_I} f = S_\Delta = \sum_{i=1}^1 M_i (x_i - x_{i-1}) = M_1 (x_1 - x_0) = \alpha (b - a) \quad (27)$$

$$\underline{\int_I} f = s_\Delta = \sum_{i=1}^1 m_i (x_i - x_{i-1}) = m_1 (x_1 - x_0) = \alpha (b - a) \quad (28)$$

従って

$$\int_a^b \alpha \, dx = \alpha (b - a) \quad (29)$$

2.4 幅と高さの積和

区間 $I = [a, b]$ で $f(x)$ が積分可能とする。
 I の分割 Δ による各部分区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$
から任意の $\xi_i \in I_i$ を選らんで、和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (30)$$

を作る。

2.4.1 区間 I_i の上限と下限

区間 I_i において上限を

$$M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) \quad (31)$$

とし、下限を

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \quad (32)$$

とすると

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \quad (33)$$

である。

2.4.2 S_Δ と s_Δ の間の値

従って、 $(x_i - x_{i-1}) > 0$ を、各辺にかけると

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}) \quad (34)$$

であるから、 s_Δ, S_Δ の定義により

$$s_\Delta \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S_\Delta \quad (35)$$

が成立する。

2.4.3 S_Δ と s_Δ の差

$f(x)$ は積分可能なので、分割 Δ の細分を進めれば

$$S_\Delta - s_\Delta \tag{36}$$

はいくらでも小さくなって、

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{30}$$

は定積分に収束する。

定理 VI-2 - 1.1

$f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a, b]$ で積分可能であれば、以下の式が成立する。

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \quad (37)$$

証明

$[a, b]$ の任意の分割と $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i))(x_{i-1} - x_i) &= \sum_{i=1}^n (f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) + g(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)\end{aligned}\quad (38)$$

ここで分割の細分を進めていけば、最左辺は $\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx$ に収束し、最右辺は $\int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$ に収束する。(終)

定理 VI-2 - 1.2

$f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a, b]$ で積分可能であれば、以下の式が成立する。

$$\int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx \quad (39)$$

証明

$[a, b]$ の任意の分割と $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) \quad (40)$$

ここで分割の細分を進めていけば、左辺は $\int_a^b \alpha f(x) dx$ に収束し、右辺の $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)$ が $\int_a^b f(x) dx$ に収束するから、右辺は $\alpha \int_a^b f(x) dx$ に収束する。(終)

定理 VI-2 - 1.3

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で積分可能であり、 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ であれば、

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0 \quad (41)$$

が成立する。

証明

$[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ なので

分割 Δ ; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

と

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

をどの様を選んで

$$f(\xi_i) \geq 0, \quad x_i - x_{i-1} > 0 \quad (42)$$

である。

従って

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0 \quad (43)$$

である。よって極限も

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0 \quad (41)$$

である。(終)

定理 VI-2 - 1.4

$f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a, b]$ で積分可能とする。このとき、 $[a, b]$ で $g(x) \leq f(x)$ であれば、

$$\int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \quad (44)$$

が成立する。

証明

$[a, b]$ で $g(x) \leq f(x)$ なので

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad (45)$$

である。定理 VI-2-1.3 より

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \geq 0 \quad (46)$$

である。定理 VI-2-1.1 より

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b (-g(x)) \, dx \geq 0 \quad (47)$$

である。

定理 VI-2-1.2 より

$$\int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \geq 0 \quad (48)$$

従って

$$\int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \quad (44)$$

(終)

2.4.4 上端 < 下端の場合

区間 $[a, b]$ を小区間に分割する際の分割点 x_i を

$$a = x_n < \cdots < x_2 < x_1 < x_0 = b \quad (49)$$

とする。この分割点を使い

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (50)$$

とする。

すべての小区間において $|x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$ と

なるように細分化を進めその極限を

$$\int_b^a f(x) dx \quad (51)$$

とかく。

上端と下端を入れ替えることによる違いは、定義の過程において

$$x_i - x_{i-1} \quad (52)$$

の符号がすべて逆転していることだけである。従って定積分の上端と下端を入れ替えると定積分の符号が逆転する。

定理 VI-2-1.5

定積分の上端と下端を入れ替えると

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (53)$$

が成立する。

2.4.5 上端 = 下端の場合

 $a = b$ とする。定理 VI-2-1.5 より

$$\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx \quad (54)$$

なので、

$$\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (55)$$

である。

定理 VI-2-1.6

上端と下端が等しい場合、

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (56)$$

が成立する。

定理 VI-2-2

$a < c < b$ のとき、 $f(x)$ は区間 $[a, c]$, $[c, b]$ で積分可能とする。このとき $f(x)$ は、区間 $[a, b]$ で積分可能であって

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (57)$$

が成立する。

証明

区間 $[a, c]$, $[c, b]$ をそれぞれ任意に小区間に分割すれば、それらを合わせた分割は $[a, b]$ の分割になる。その分割を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c < x_{k+1} < \cdots < x_n = b \quad (58)$$

とする。各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から ξ_i を選ぶ。このとき、

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^k f(\xi_i)(x_{i-1} - x_1) + \sum_{k+1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_1) \quad (59)$$

である。

この形の細分化を進めると、右辺第一項は

$$\int_a^c f(x) \, dx \quad (60)$$

に収束し、右辺第二項は

$$\int_c^b f(x) \, dx \quad (61)$$

に収束する。従って右辺は

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (62)$$

に収束する。

そして左辺

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (63)$$

は

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (64)$$

に収束する。(終)

問題 VI-2-1

数直線上の 3 点 a, b, c の位置関係が以下の場合に

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

が成り立つことを示しなさい。

1. $a < b < c$
2. $b < a < c$
3. $b < c < a$
4. $c < a < b$
5. $c < b < a$

$a < b < c$ の場合

定理 VI-2-2 より

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

なので右辺第二項を左辺へ移行し左右を入れ替えると

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx - \int_b^c f(x) \, dx$$

となるが、右辺第二項の上端と下端を入れ替えると定理 VI-2-1.5 により

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

$b < a < c$ の場合

同様に定理 VI-2-2 より

$$\int_b^c f(x) \, dx = \int_b^a f(x) \, dx + \int_a^c f(x) \, dx$$

なので左辺を右辺に移項し、右辺第一項を左辺へ移行すると

$$-\int_b^a f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx - \int_b^c f(x) \, dx$$

左辺ならびに右辺第二項の上端と下端をそれぞれ入れ替えると定理 VI-2-1.5 により

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

$b < c < a$ の場合

同様に定理 VI-2-2 より

$$\int_b^a f(x) \, dx = \int_b^c f(x) \, dx + \int_c^a f(x) \, dx$$

左辺と右辺に -1 を掛け

$$-\int_b^a f(x) \, dx = -\int_b^c f(x) \, dx - \int_c^a f(x) \, dx$$

両辺のすべての項の上端と下端を入れ替え定理 VI-2-1.5 により

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

$c < a < b$ の場合

同様に定理 VI-2-2 より

$$\int_c^b f(x) \, dx = \int_c^a f(x) \, dx + \int_a^b f(x) \, dx$$

右辺第一項を左辺に移行し、左右を入れ替えると

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_c^a f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

右辺第一項の上端と下端を入れ替え定理 VI-2-1.5 により

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

$c < b < a$ の場合

同様に定理 VI-2-2 より

$$\int_c^a f(x) \, dx = \int_c^b f(x) \, dx + \int_b^a f(x) \, dx$$

右辺第二項を左辺に移行し、左辺を右辺に移項すると

$$-\int_b^a f(x) \, dx = -\int_c^a f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

左辺と右辺第一項の上端と下端を入れ替え定理 VI-2-1.5 により

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

定理 VI-2-2.1

数直線上の 3 点 a, b, c の位置関係がどうであっても、次の関係式が成り立つ。

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (65)$$

定理 VI-2-3

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であり、かつこの区間で $f(x) \geq 0$ とする。このとき $[a, b]$ 内の 1 点 c において $f(c) > 0$ であれば

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad (66)$$

が成立する。

証明

$a < c < b$ の場合

仮定により

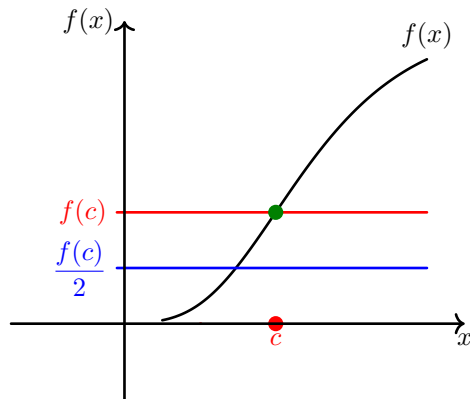
$$f(c) > 0 \quad (67)$$

なので、

$$\frac{f(c)}{2} > 0 \quad (68)$$

である。

図 13 $f(c) > 0$



$f(x)$ は点 c で連続だから適当に $\delta > 0$ を
 選び

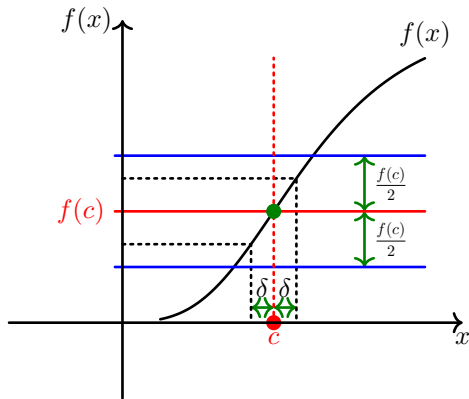
$$|x - c| < \delta \quad (69)$$

であるすべての x に対して

$$|f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2} \quad (70)$$

とできる。

図 14 $|x - c| < \delta$



ここで δ は

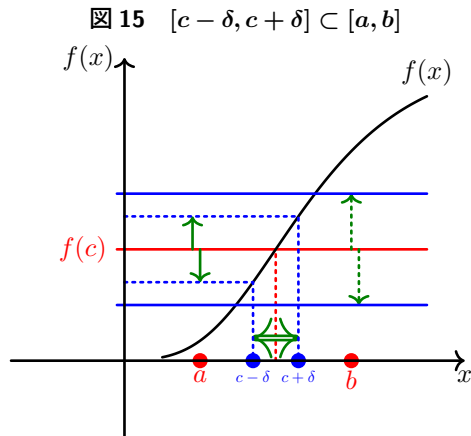
$$[c - \delta, c + \delta] \subset [a, b] \quad (71)$$

となるように選んでおく。

このとき、 $x \in [c - \delta, c + \delta]$ に対して

$$-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2} \quad (72)$$

が成り立つ。



(72) 前半から

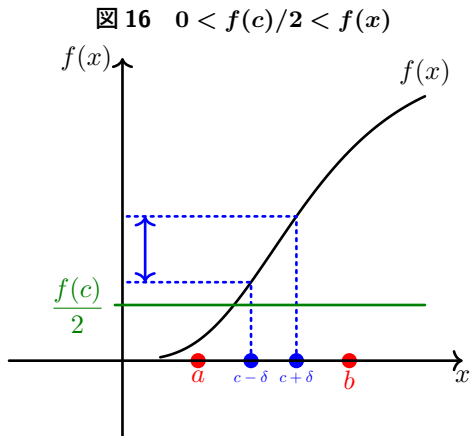
$$-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) \quad (73)$$

右辺第二項を左辺へ移項すると

$$\frac{f(c)}{2} < f(x) \quad (74)$$

ここで、 $0 < \frac{f(c)}{2}$ なので

$$0 < \frac{f(c)}{2} < f(x) \quad ; x \in [c - \delta, c + \delta] \quad (75)$$



ここで、区間を $[a, c - \delta]$, $[c - \delta, c + \delta]$, $[c + \delta, b]$ と分け

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \quad (76)$$

とする。

右辺第一項並びに第三項は、定理 VI-2-1.3 により非負である。(76) 右辺第二項は、

$$\frac{f(c)}{2} < f(x) \quad (74)$$

なので、定理 VI-2-1.4 により

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \quad (77)$$

ここで左辺は例題 1 により

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = \frac{f(c)}{2} ((c+\delta) - (c-\delta)) \quad (78)$$

$$= \frac{f(c)}{2} (\cancel{c} + \delta - \cancel{c} + \delta) \quad (79)$$

$$= \frac{f(c)}{2} 2\delta = f(c)\delta \quad (80)$$

仮定により $f(c) > 0$, $\delta > 0$ だから、 $f(c)\delta > 0$ なので

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx > 0 \quad (81)$$

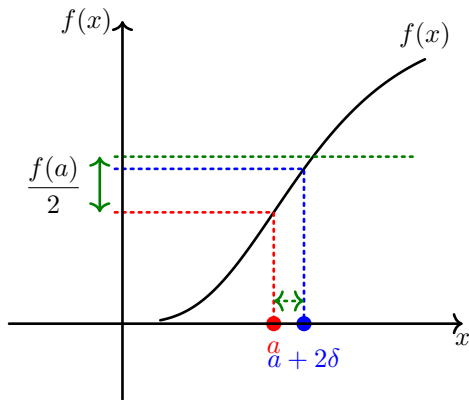
よって、(76) の右辺は正になるから左辺も正である。

$a = c$ の場合

関数 $f(x)$ は点 $c = a$ で連続なので、区間 $[a, a + 2\delta]$ で

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \quad (82)$$

となる δ をとることができる。

図 17 $[a + 2\delta]$ 

ここで、区間 $[a, a + 2\delta] \subset [a, b]$ で

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \quad (83)$$

となる δ をとる。すると $x \in [a, a + 2\delta]$ に対して

$$-\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2} \quad (84)$$

が成り立つ。

(84) の前半と、 $f(c) > 0$, $a = c$ の仮定より

$$0 < \frac{f(c)}{2} = \frac{f(a)}{2} < f(x) \quad ; x \in [a, a + 2\delta] \quad (85)$$

を得る。

ここで

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^{a+2\delta} f(x) \, dx + \int_{a+2\delta}^b f(x) \, dx \quad (86)$$

と区間を分ける。右辺第二項は非負であり、右辺第一項は

$$\int_a^{a+2\delta} f(x) \, dx \geq \int_a^{a+2\delta} \frac{f(a)}{2} \, dx \quad (87)$$

例題 VI-2-1 により

$$= \frac{f(a)}{2} ((a+2\delta) - a) = f(a)\delta > 0 \quad (88)$$

よって、右辺は正であるから左辺も正である。

$b = c$ の場合

区間 $[b - 2\delta]$ で

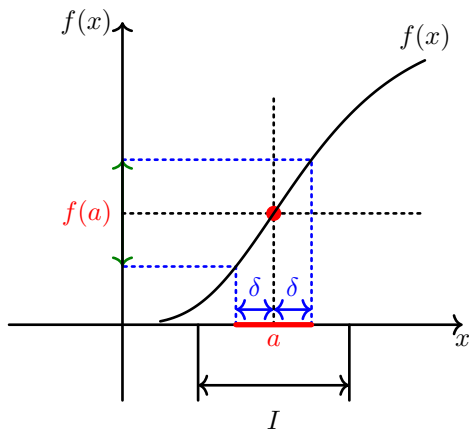
$$|f(x) - f(b)| < \frac{f(b)}{2} \tag{89}$$

となる δ をとればよい。

(終)

定理 VI-2-3.1

$f(x)$ は点 a を含む区間 I で連続であり、かつ $f(a) \neq 0$ とする。このとき $\delta > 0$ を十分小さく選べば $|x - a| < \delta$ を満たす全ての $x \in I$ に対して $f(x)$ は $f(a)$ と同符号になる。

図 18 $|x - a| < \delta$ 

証明

$f(a) > 0$ として証明する。

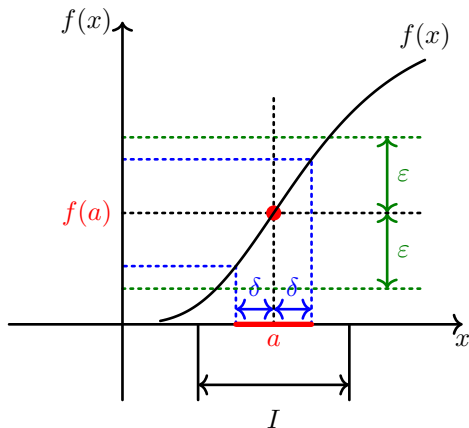
$x \in I$ で $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x) \rightarrow f(a)$ であるから、任意の ε に対して

$$|x - a| < \delta \quad ; x \in I \quad (90)$$

ならば

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (91)$$

となるように δ を選ぶことができる。

図 19 $\varepsilon - \delta$ 論法

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (91)$$

は、絶対値を使わずにあらわすと

$$-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \quad (92)$$

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \quad (93)$$

である。

ε を

$$0 < \varepsilon < f(a) \quad (94)$$

であるように選んで、対応する δ を求めれば
 $|x - a| < \delta$ である $x \in I$ に対して

$$0 < f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \quad (95)$$

となる。したがって、

$$0 < f(x) \quad (96)$$

が成立する。 $f(a) < 0$ のときも同様である。(終)

問題 VI-2 - 2

定理 VI-2 - 3.1 が

$$f(a) < 0$$

のとき成り立つことを証明しなさい。

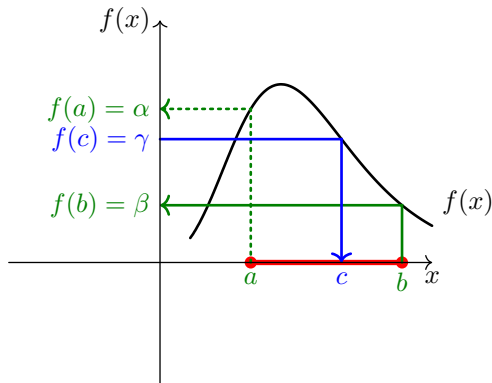
定理 VI-2-3.2 (中間値の定理)

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続であって
 $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, $\alpha > \beta$ (または
 $\alpha < \beta$) とする。このとき $\alpha > \gamma > \beta$ (ま
たは $\alpha < \gamma < \beta$) を満たす任意の γ に対
して

$$f(c) = \gamma \quad ; a < c < b \quad (97)$$

となる c が存在する。

図 20 中間値の定理



証明

$\alpha > \gamma > \beta$ だから

$$F(x) = f(x) - \gamma \quad (98)$$

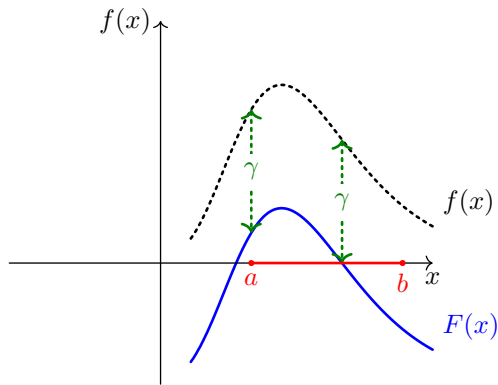
とおけば、 $F(x)$ は $[a, b]$ で連続であって

$$F(a) = \alpha - \gamma > 0 \quad (99)$$

$$F(b) = \beta - \gamma < 0 \quad (100)$$

である。

図 21 $F(x) = f(x) - \gamma$



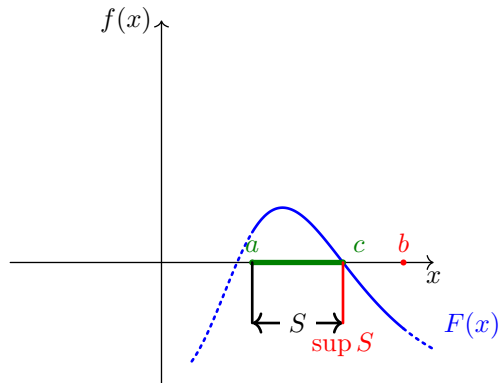
このとき $F(c) = 0$ となる c が区間 $[a, b]$ 内にあることを示せばよい。ここで

$$S = \{x | F(x) > 0, x \in [a, b]\} \quad (101)$$

とおく。 S は有界な集合だから上限を持つ。そこで

$$c = \sup S \quad (102)$$

とおけば、この点で $F(c) = 0$ となることを示す。

図 22 S 

$F(c) < 0$ と仮定した場合

c は集合 S の上限だから c は S の上界ではあるが、任意の $\delta > 0$ に対して $c - \delta$ は上界ではない。したがって、

$$c - \delta < \tilde{x} \leq c \quad ; \tilde{x} \in S \quad (103)$$

となる $\tilde{x}$ があり、 $\tilde{x} \in S$ だから $F(\tilde{x}) > 0$ である。

ここで δ はいくらでも小さくとれるから、 $\tilde{x}$ は c にいくらでも近い値をとることができる。すなわち、 c のいくらでも近くに

$F(\tilde{x}) > 0$ となる $\tilde{x}$ がある。

ところで、定理 VI-2-3.1 により、 $F(c) < 0$ のときは c の十分近くの全ての x に対して $F(\tilde{x}) < 0$ となるはずである。このことは c のいくらでも近くに $F(\tilde{x}) > 0$ となる $\tilde{x}$ があるという事実と矛盾する。

よって $F(c) < 0$ とはなりえない。

$F(c) > 0$ と仮定した場合

$F(b) < 0$ だから $c < b$ である。ここで再び定理 VI-2-3.1 により $F(c) > 0$ だから、十分小さく δ を選んで

$$c < x < c + \delta < b$$

である全ての x に対して

$$F(x) > 0$$

とすることができる。

このことは $c < x$ で $x \in S$ となる $x \in [a, b]$

があることを意味するから S の中に c より大きな数 x があることになって c が S の上限であることと矛盾する。よって $F(c) > 0$ とはならない。

矛盾が生じない場合は $F(c) = 0$

こうして、 $F(c) > 0$ あるいは $F(c) < 0$ と仮定することによって矛盾が生ずるから、 $F(c) = 0$ でなくてはならない。(終)

2.5 積分の平均値の定理

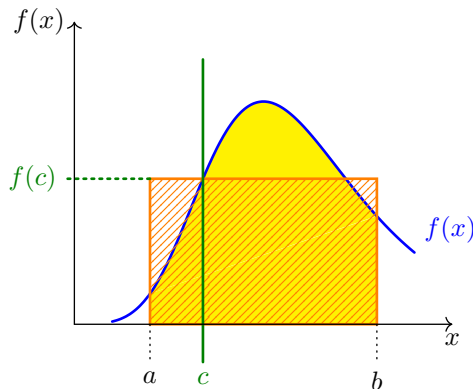
定理 VI-2-4 (積分の平均値の定理)

$f(x)$ が $[a, b]$ で連続であれば

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c) \quad (104)$$

を満たす c がある。

図 23 定積分と同じ面積を持つ長方形

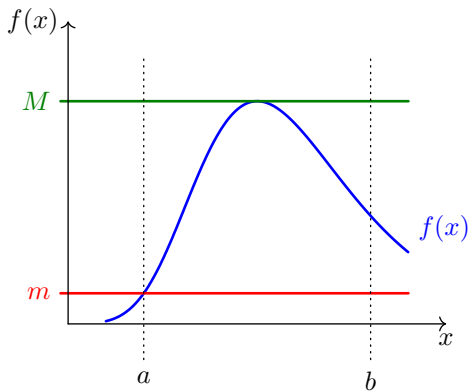


証明

区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の最大値を M 、最小値を m とすれば区間内の全ての x に対して

$$m \leq f(x) \leq M \quad (105)$$

が成り立つ。

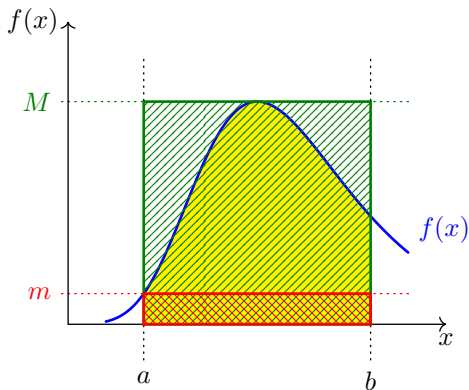
図 24 $m \leq f(x) \leq M$ 

したがって、

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (106)$$

が成り立つ。

図 25 定積分の範囲

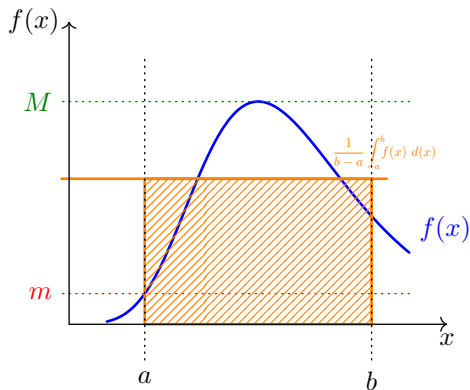


(106) の全ての辺を $(b - a)$ で割ると

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad (107)$$

を得る。

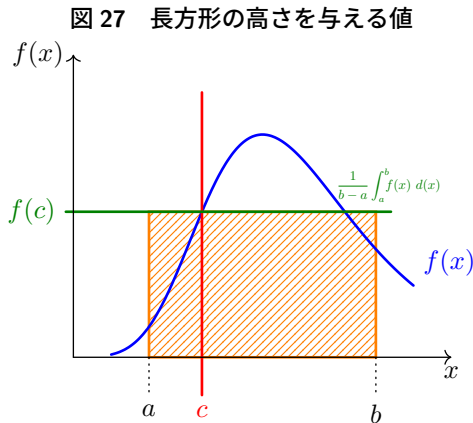
図 26 長方形の高さ



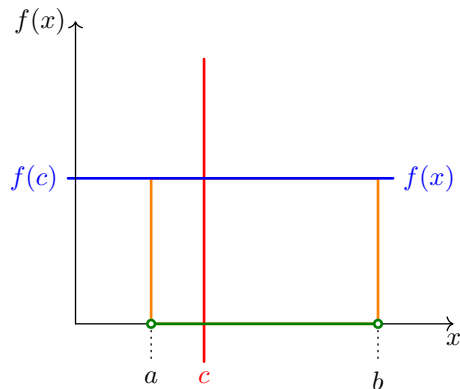
中間値の定理により, $[a, b]$ で $f(x)$ は m と M の間の値を全てとるから (107) により、
 $a \leq c \leq b$ であって

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad (108)$$

となる点 c がある。



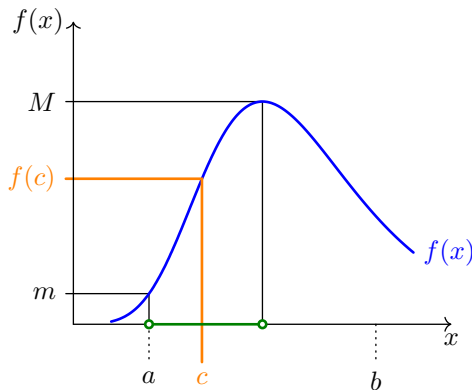
ここで、 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で一定値をとる定数値関数ならば $m = M = f(x)$ だから点 c は $[a, b]$ 内のどの点でもよい。

図 28 $f(x)$ が定数値関数

$f(x)$ が定数値関数でなければ、 $m < M$ であって、 m と M の中間の値は m をとる x 軸上の点と M をとる点の中間の点でとる。

いずれの場合も $[a, b]$ の端点ではないとしてよい。

(108) の両辺に $(b - a)$ をかければ (104) を得る。(終)

図 29 c をとる位置

定理 VI-2 - 4.1

$f(x)$, $g(x)$ はともに $[a, b]$ で連続で、この区間で

$$g(x) \geq 0 \quad (109)$$

とする。このとき

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx \quad ; \quad a < c < b \quad (110)$$

となる点 c がある。

証明

$[a, b]$ における $f(x)$ の最大値を M 、最小値を m とすれば

$$m \leq f(x) \leq M \quad (111)$$

である。

これら各辺に $g(x)$ を掛ける。 $g(x) \geq 0$ なので、

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad (112)$$

が成立する。

したがって、定理 VI-2-1.4 により

$$\int_a^b m g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq \int_a^b M g(x) \, dx \quad (113)$$

である。

さらに定理 VI-2-1.2 により

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx \quad (114)$$

が成立する。

区間 $[a, b]$ において恒等的に $g(x) \equiv 0$ であれば (110) の両辺は共に 0 となって、任意の $c \in [a, b]$ に対して (110) は成立する。

$g(x) > 0$ となる点 x があれば定理 VI-2-3 により

$$\int_a^b g(x) \, dx > 0 \quad (115)$$

であるから (114) を $\int_a^b g(x) \, dx$ で割って

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} \leq M \quad (116)$$

が得られる。

よって中間値の定理により

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} = f(c) \quad ; \quad a < c < b \quad (117)$$

となる c がある。ここで分母を払えば (110) が得られる。(終)

2.6 微分積分学の基本定理

定理 VI-2-5(微分積分学の基本定理)

$f(x)$ は点 a を含む区間 I で連続とする。このとき $x \in I$ に対して

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) \quad (118)$$

とおけば、 $F(x)$ は区間 I で微分可能であって

$$F'(x) = f(x) \quad (119)$$

が成立する。

証明

$x + h \in I$ となるように $h > 0$ をとれば 定理 VI-2-2.1 により

$$\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_{x+h}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt \quad (120)$$

$$\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt \quad (121)$$

$$\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (122)$$

仮定により

$$\int_a^{x+h} f(t) \, dt = F(x+h) \quad (123)$$

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) \quad (124)$$

なので、

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) \, dt \quad (125)$$

となる。

(125) 右辺の積分は、 $0 < \theta < 1$ を用いて、

$$a = x \tag{126}$$

$$c = x + \theta h \tag{127}$$

$$b = x + h \tag{128}$$

とすると、定理 VI-2-4(積分の平均値の定理) により

$$\int_x^{x+h} f(t) \, dt = ((x+h) - x)f(x + \theta h) \tag{129}$$

$$= hf(x + \theta h) \tag{130}$$

とかくことができる。

すると、(125) 左辺と (130) より

$$F(x+h) - F(x) = hf(x+\theta h) \quad (131)$$

である。

両辺を h で払うと

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x+\theta h) \quad (132)$$

となる。

ここで $h \rightarrow 0$ とすれば、右辺の極限があるから左辺の極限も存在して

$$F'(x) = f(x) \quad (133)$$

が得られる。

x が区間 I の端点の時は $F'(x)$ は片側微分 $F'(x+0)$ または $F'(x-0)$ で置き換えられる。(終)

定理 VI-2-5.1

区間 I で連続な関数は全てその区間で不定積分をもつ。

証明

$f(x)$ が区間 I で連続であれば、定理 VI-2-5 の $F(x)$ は $F'(x) = f(x)$ をみたすから $f(x)$ の不定積分である。(終)

定理 VI-2-6

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とし、 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすれば

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (134)$$

が成立する。

証明

$G(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおけば、 $G(x)$ も $f(x)$ の不定積分であり、 $F(x)$ も $f(x)$ の不定積分だから

$$G'(x) = F'(x) = f(x) \quad (135)$$

となる。したがって

$$G'(x) - F'(x) = 0 \quad (136)$$

$$(G(x) - F(x))' = 0 \quad (137)$$

なので、 $G(x) - F(x)$ は定数である。

この定数を C であらわすと

$$G(x) - F(x) = C \quad (138)$$

$$G(x) = F(x) + C \quad (139)$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C \quad (140)$$

である。

C の値を決めるために $x = a$ とおくと
(140) 左辺は定理 VI-2-1.5 により

$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad (141)$$

であから (140) は

$$0 = F(a) + C \quad (142)$$

$$-F(a) = C \quad (143)$$

となる。(140) に (143) を代入し

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad (144)$$

が得られる。

ここで $x = b$ とすれば

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad (145)$$

となる。積分変数を t から x に変えれば (134) が得られる。(終)

2.6.1 定積分の表記法

$F(b)$ と $F(a)$ の差

$$F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b \quad (146)$$

とかき、不定積分を

$$F(x) = \int f(x) dx \quad (147)$$

とかけば定積分は

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b \quad (148)$$

とあらわすことができる。

例題 1

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \, dx \quad (149)$$

解法 1

(148) の表記法を利用すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \, dx = \left[\int \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \, dx \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (150)$$

括弧内を積分し

$$= \left[\exp(-\exp(-x)) \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (151)$$

(146) より $\left[F(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$ なので

$$= \exp(-\exp(-(+\infty))) - \exp(-\exp(-(-\infty))) \quad (152)$$

$$= \exp(-\exp(-\infty)) - \exp(-\exp(+\infty)) \quad (153)$$

$$= \exp(0) - \exp(-\infty) \quad (154)$$

$$= 1 - 0 = 1 \quad (155)$$

問題 VI-2-1

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-\infty}^a \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \, dx$$

解例 VI-2 - 1

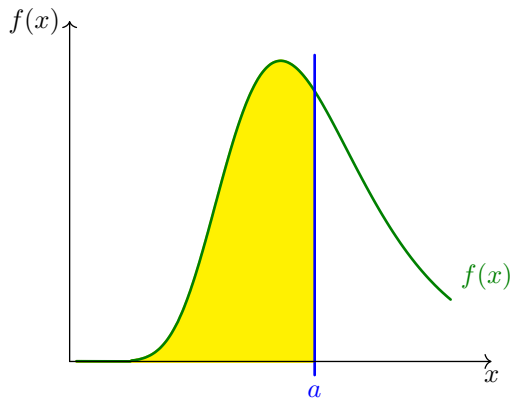
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^a \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \, dx &= \left[\int \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \, dx \right]_{-\infty}^a \\ &= \left[\exp(-\exp(-x)) \right]_{-\infty}^a \\ &= \exp(-\exp(-(a))) - \exp(-\exp(-(-\infty))) \\ &= \exp(-\exp(-(a)))\end{aligned}$$

2.7 確率をあらわす関数

2.7.1 確率密度関数

$y = f(x)$ を確率変数 x の関数とする。このとき、関数 $f(x)$ が描く曲線と、 x 軸と $x = a$ における垂直線で囲まれる範囲が、確率変数 x が a 以下になる確率 $\Pr(x \leq a)$ になるとき、 $f(x)$ を『確率密度関数』とよぶ。

図 30 確率密度関数



2.7.2 確率を返す関数

確率密度関数を $f(x)$ とすると、確率変数 x が a 以下になる確率は、 $(-\infty, a)$ における $f(x)$ と x 軸の間の範囲である。この値は確率密度関数を積分することによって得ることができる。確率密度関数を積分した関数を $F(x)$ であらわし、累積分布関数とよぶ。

確率密度関数を積分すると累積分布関数が得られ、

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) \quad (156)$$

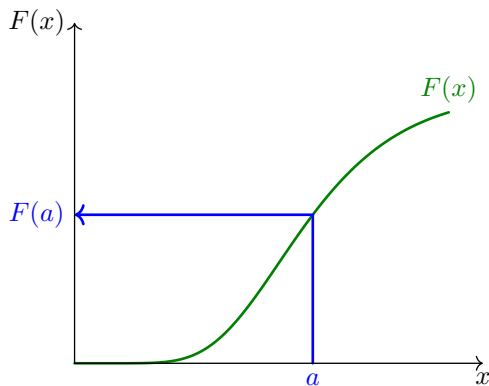
累積分布関数を微分すると確率密度関数が得られる。

$$F'(x) = f(x) \quad (157)$$

2.7.3 累積分布関数

$y = F(x)$ を確率変数 x の関数とする。このとき、関数 $F(a)$ の値が、確率変数 x が a 以下になる確率 $\Pr(x \leq a)$ になるとき、 $F(x)$ を『累積分布関数』とよぶ。

図 31 累積分布関数



2.8 第一種極値分布の確率密度関数と累積分布関数

第一種極値分布の確率密度関数は

$$f(x) = \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \quad (158)$$

で定義され、累積分布関数は

$$F(x) = \exp(-\exp(-x)) \quad (159)$$

で定義される。

2.8.1 確率の公理

1. 全ての事象 A に対して $0 \leq \Pr(A) \leq 1$

2. $\Pr(\Omega) = 1$

3. 互いに排反な事象 $A_1, A_2, A_3, \dots$ に対して

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3) + \dots$$

これに合うならどのような数も確率と認められる。

2.8.2 $\exp(-\exp(-x))$ の性質

第一種極値分布の累積分布関数を定義している

$$F(x) = \exp(-\exp(-x)) \quad (159)$$

は正である。そしてその導関数

$$F'(x) = \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) \quad (158)$$

は正なので $F(x)$ は狭義単調増加関数である。そして $F(x)$ の値域は $(0, 1)$ であり、 $F'(x)$ の $(-\infty, +\infty)$ における定積分は 1 である。

従って、 $F(x)$ は確率の公理を満たし、 $F(x)$ の確率密度関数 ($f(x)$) は $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ で与えられる。

2.9 まとめ

- 定積分の定義は関数で囲われる領域をあらわす値。
- 定積分の演算は不定積分の差。
- 確率を面積であらわした関数が『確率密度関数』。
- 確率を高さであらわした関数が『累積分布関数』。
- 『確率密度関数』を積分すると『累積分布関数』が得られる。
- 『累積分布関数』を微分すると『確率密度関数』が得られる。
- 第一種極値分布で確かめた。