第 VI 部　Logit model

1　不定積分

ポイント

- 不定積分の定義
- 置換積分

1.1　はじめに

- 答えを知っている問題が出ると嬉しくなります。
- 答えが書いていない問題は不安を感じます。
- 答えを教えてもらえないと不満を感じます。
- でも答えだけを知っても疑問が残ります。

1.1.1　微分の定義

$F(x)$ の導関数を $f(x)$ であらわし、以下のように定義する。

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

$F(x)$ から導関数 $f(x)$ を求める演算を『微分』といい、$F(x)$ から $f(x)$ を求めることを『 $F(x)$ を微分する』という。また、$F(x)$ を『原始関数』とよぶ。

1.1.2 微分の公式

$F(x), G(x)$ は微分可能であって、それぞれの導関数を $f(x), g(x)$ とする。

$$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x) \tag{2}$$

$$(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x) \tag{3}$$

$$(\exp(x))' = \exp(x) \tag{4}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad ;\ x \neq 0 \tag{5}$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad ; x > 0,\ \alpha \text{は実数} \tag{6}$$

$$\left(x^2\right)' = 2x \tag{7}$$

$$(x)' = 1 \tag{8}$$

$$(C)' = 0 \quad ;\ C \text{ は定数} \tag{9}$$

1.2　不定積分

定義

関数 $f(x)$ が与えられた時、$f(x)$ を導関数として持つ関数、つまり、

$$F'(x) = f(x) \tag{10}$$

を満たす関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の『不定積分』という。

(10) が成り立つならば、C を任意の定数として

$$(F(x)+C)' = f(x) \tag{11}$$

も成り立つから $f(x)$ の不定積分はいくつもある。しかし異なる不定積分の間には定数の差が有るだけである。

定理 VI–1 – 1

区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して、この区間で $F(x), G(x)$ がともに $f(x)$ の不定積分になっていれば、区間 I において

$$G(x) = F(x) + C \quad ; \ C \text{ は定数} \tag{12}$$

が成立する。

証明

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \tag{13}$$

であるから (2)(3) より

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \tag{14}$$

が成り立つ。導関数が 0 である関数は、(9) によりその区間で定数である。

ここで C を任意の定数とすると、区間 I において

$$G(x) - F(x) = C \tag{15}$$

すなわち

$$G(x) = F(x) + C \tag{12}$$

が成立する。（終）

1.2.1 不定積分の表記と積分定数

定数部分が 0 である $f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とすれば、全ての不定積分は $F(x)+C$ の形にあらわすことができる。そこで $f(x)$ の不定積分を

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \tag{16}$$

という記号であらわす。右辺の C を『積分定数』、$f(x)$ を『被積分関数』、そして、x を『積分変数』という。関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めることを『$f(x)$ を積分する』という。具体的に積分する際には、積分定数 C を含まない形だけを書くことがある。

1.2.2 具体的な不定積分の求め方

不定積分は微分の逆演算だから

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{17}$$

であることを証明するためには、

$$F'(x) = f(x) \tag{18}$$

が成り立つことを確認すればよい。

例題 1

次の関数を x を積分変数として積分しなさい。解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(x) = \exp(x) \tag{19}$$

解法

微分の公式より

$$(\exp(x))' = \exp(x) \tag{4}$$

なので

$$\int \exp(x)\ dx = \exp(x) \tag{20}$$

例題 2

次の関数を x を積分変数として積分しなさい。解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad ; x \neq 0 \tag{21}$$

解法

微分の公式より

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \tag{5}$$

なので

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| \tag{22}$$

例題 3

次の関数を x を積分変数として積分しなさい。解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(x) = 1 \tag{23}$$

解法

微分の公式より

$$(x)' = 1 \tag{8}$$

なので

$$\int 1\ dx = \int dx = x \tag{24}$$

例題 4

次の関数を x を積分変数として積分しなさい。解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(x) = x \tag{25}$$

解法

微分の公式より

$$\left(x^2\right)' = 2x \tag{7}$$

(3) により

$$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x \tag{26}$$

なので

$$\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2}{2} \tag{27}$$

問題 VI–1 – 1

x を積分変数として次の関数の不定積分を求めよ。ただし、 $x > 0,\ \alpha \neq -1$ とする。解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(x) = x^{\alpha}$$

解例 VI−1 − 1

微分の公式 (6) より

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha$$
$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$$

なので

$$\int x^\alpha\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

定理 VI–1 – 2

積分定数を両辺で同じものをとっておくと、不定積分について次の関係式が成立する。

$$\int \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx \tag{28}$$

証明

(28) の左辺を微分すると、

$$f(x)+g(x) \tag{29}$$

同様に右辺を微分すると第一項の導関数は

$$f(x) \tag{30}$$

であって第二項の導関数は

$$g(x) \tag{31}$$

なので、右辺の導関数は

$$f(x) + g(x) \tag{32}$$

である。定理 VI–1 – 1 により導関数が等しい場合は原始関数の差は積分定数の差である。仮定により、両辺の積分定数は等しいので (28) が成立する。(終)

定理 VI–1 – 3

積分定数を両辺で同じものをとっておくと、不定積分について次の関係式が成立する。ただし α は定数とする。

$$\int \alpha f(x)\ dx = \alpha \int f(x)\ dx \tag{33}$$

証明

(33) 左辺を微分すると

$$\alpha f(x) \tag{34}$$

(33) 右辺において

$$\int f(x)\ dx \tag{35}$$

の導関数は

$$f(x) \tag{36}$$

なので、右辺の導関数は

$$\alpha f(x) \tag{37}$$

である。したがって定理 VI–1 – 1 により (33) が成立する。(終)

問題 VI–1 − 2

x を積分変数として次の関数の不定積分を求めよ。ただし、α は定数とする。また解答に際して積分定数は省略するものとする。

$$f(x) = x + \alpha$$

解例 VI–1 − 2

$$\begin{aligned}\int f(x)\ dx &= \int (x+\alpha)\ \ dx \\ &= \int x\ dx + \alpha\int dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \alpha x\end{aligned}$$

不定積分の公式

確認された不定積分の公式を示す。表記において積分定数は省略する。

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx \tag{38}$$

$$\int \alpha f(x)\ dx = \alpha \int f(x)\ dx \tag{39}$$

$$\int \exp(x)\ dx = \exp(x) \tag{40}$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| \qquad ; x \neq 0 \tag{41}$$

$$\int x^{\alpha}\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad ; \alpha \neq -1,\ x > 0 \tag{42}$$

1.3　合成関数の微分と置換積分

合成関数とは、

$$z = F(y) \tag{43}$$

$$y = G(x) \tag{44}$$

を合成して得られる関数

$$z = F(G(x)) \tag{45}$$

をいう。

定理 IV−4 − 1(合成関数の微分)

$y = G(x)$ が区間 (a, b) で微分可能であるとする。更に $z = F(y)$ が $y = G(x)$ の値域を含む区間において微分可能であれば、合成関数 $z = F(G(x))$ は区間 (a, b) で微分可能であって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \tag{46}$$

が成立する。

ここで、

$$\frac{dz}{dx} = (F(G(x)))' \tag{47}$$

$$\frac{dz}{dy} = F'(y) = F'(G(x)) \tag{48}$$

$$\frac{dy}{dx} = G'(x) \tag{49}$$

であらわすと、合成関数の導関数は

$$\begin{aligned} (F(G(x)))' &= F'(y)\ G'(x) \qquad (50)\\ &= F'(G(x))\ G'(x) \qquad (51)\end{aligned}$$

とあらわすことができる。

定理 VI–1 – 4（置換積分）

$G(x)$ を連続な導関数を持つ関数として

$$y = G(x) \tag{52}$$

とおけば

$$\int f(G(x))G'(x)\ dx = \int f(y)\ dy \tag{53}$$

が成立する。ここで $G(x)$ の値域は $f(y)$ の定義域に含まれているものとする。

証明

$$F(y) = \int f(y)\ dy \tag{54}$$

とおくと (54) の導関数は

$$F'(y) = f(y) \tag{55}$$

である。仮定により、

$$y = G(x) \tag{52}$$

なので、(54) 左辺に代入すると、

$$F(y) = F(G(x)) \tag{56}$$

(56) の導関数は、合成関数の微分により

$$\frac{d}{dx}F(G(x)) = \frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{dx} = F'(y)G'(x) \tag{50}$$

$$= f(y)G'(x) \tag{57}$$

$$= f(G(x))G'(x) \tag{58}$$

が成り立つから、最左辺と最右辺を抜き出すと

$$\frac{d}{dx}F(G(x)) = f(G(x))G'(x) \tag{59}$$

である。(59) を x について積分すると

$$F(G(x)) = \int f(G(x))G'(x)\ dx \tag{60}$$

が得られる。(60) 左辺は (56) および (54) により

$$F(G(x)) = F(y) = \int f(y)\ dy \tag{61}$$

なので、(60) と (61) はそれぞれの左辺を介して等しいから

$$\int f(G(x))G'(x)\ dx = \int f(y)\ dy \tag{53}$$

が成り立つ。（終）

例題 5

x を積分変数として

$$\exp(-x) \tag{62}$$

の不定積分を求めよ。
なお解答に際しては積分定数 C を省略するものとする。

解法

天下り的に

$$y = -x \tag{63}$$

とおき、x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -1 \tag{64}$$

である。(64) 式を形式的に分数に見立てて分母を掃うと、

$$dy = (-1)\ dx \tag{65}$$

$\exp(-x)$ の不定積分の被積分関数に $(-1) \times (-1)$ を掛けて

$$\int \exp(-x)\ dx = \int (-1)\exp(-x)(-1)\ dx \tag{66}$$

ここに置換積分の定理を適用する。(63)(65) を用いて

$$= \int (-1)\exp(y)\ dy \tag{67}$$

(39) より

$$= -\int \exp(y)\ dy \tag{68}$$

ここで、(40) より

$$\int \exp(y)\ dy = \exp(y) \tag{69}$$

なので (68) 式は

$$= -\exp(y) \tag{70}$$

(63) により $y = -x$ なので置き換えて

$$\int \exp(-x)\ dx = -\exp(-x) \tag{71}$$

が得られる。　　　　（積分定数省略）

問題 VI–1 – 3

x を積分変数として次の関数の不定積分を求めよ。解答に際して積分定数 C は省略するものとする。

$$\exp(-x)\exp(-\exp(-x))$$

解例 VI–1 – 3

$$y = -\exp(-x) \tag{a}$$

とおく。さらに

$$u = -x \tag{b}$$

とおくと、(a) は

$$y = -\exp(u) \tag{c}$$

(b)、(c) をそれぞれ微分すると

$$\frac{du}{dx} = -1$$
$$\frac{dy}{du} = -\exp(u)$$

なので合成関数の微分により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = -\exp(u)(-1) = \exp(-x)$$

最左辺と最右辺を取り出し、左辺を形式的に分数に見立てて分母を掃うと

$$dy = \exp(-x)\ dx \tag{d}$$

被積分関数の因数の順序を変えて表記すると

$$\int \exp(-x)\exp(\exp(-x))\ dx = \int \exp(-\exp(-x))\exp(-x)\ dx$$

置換積分の定理により (a) および (d) を使い

$$= \int \exp(y)\ dy$$

(40) により

$$= \exp(y)$$

(a) により $y = -\exp(-x)$ なので

$$\int \exp(-x)\exp(\exp(-x))\ dx = \exp(-\exp(-x))$$

問題 VI–1 – 4

x を積分変数として次の関数の不定積分を求めよ。ただし、$\alpha \neq 0$ とする。解答に際して積分定数 C は省略するものとする。

$$\exp(\alpha x)$$

解例 VI–1 – 4

$$y = \alpha x$$

とおき、x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \alpha$$

形式的に分数に見立てて分母を掃うと

$$dy = \alpha \ dx$$

$$
\begin{aligned}
\int \exp(\alpha x)\ dx &= \int \frac{\alpha}{\alpha} \exp(\alpha x)\ dx \\
&= \int \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x)\alpha\ dx \\
&= \int \frac{1}{\alpha} \exp(y)\ dy \\
&= \frac{1}{\alpha} \int \exp(y)\ dy \\
&= \frac{1}{\alpha} \exp(y) \\
&= \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x) \qquad\qquad (\text{積分定数 } C \text{ 省略})
\end{aligned}
$$

1.4　まとめ

- 導関数から原始関数を求める演算が積分。
- 適当な原始関数を想定し、微分し、被積分関数を得ることで確認。
- $F'(x) = f(x)$ なので $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x)$
- 説明において積分定数 C を省略している。
- 置換積分は合成関数の微分の逆演算。