

第Ⅴ部 Logistic Model

5 ロジスティックモデルの導出

ポイント

- 変数分離形の微分方程式
- マルサスモデル

- ロジスティック方程式

5.1 はじめに

- ロジスティックモデルはロジスティック方程式から得られます。
- ロジスティック方程式はある個体の個体数を論理的に記述しています。

定理 VI-1 - 3 置換積分

$G(x)$ を連続な導関数を持つ関数として

$$y = G(x)$$

とおけば

$$\int f(G(x))G'(x) dx = \int f(y) dy$$

が成立する。ここで $G(x)$ の値域は $f(y)$ の定義域に含まれるものとする。

5.2 変数分離形の微分方程式

微分方程式とは、関数 $y = f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が含まれている関数方程式をいう。

「変数分離形の微分方程式」とは

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y) \quad (1)$$

のように、 $\frac{dy}{dx} = (x \text{ の関数})(y \text{ の関数})$ とあらわせる微分方程式をいう。

変数分離形の微分方程式のとき方

微分方程式は x と y との間の関係を

$$y = G(x) \tag{2}$$

として得ることを目的としている。問題の性質上、 $G(x)$ は微分可能である。そこで

$$G'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

$$h(y) \neq 0 \tag{4}$$

とする。

すると、(1) は、

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y) \quad (1)$$

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (5)$$

$\frac{1}{h(y)}$ は y の関数なので $f(y)$ とあらわすと

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (6)$$

$y = G(x)$ なので

$$f(G(x)) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (7)$$

(3) であらわし

$$f(G(x))G'(x) = g(x) \quad (8)$$

両辺を x で積分すると

$$\int f(G(x))G'(x) \, dx = \int g(x) \, dx \quad (9)$$

置換積分の定理より

$$\int f(y) \, dy = \int g(x) \, dx \quad (10)$$

を得る。あとは両辺を普通に積分すればよい。積分定数を残した状態の解を一般解という。

例題 V-5-1

以下の微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 $y \neq 0$ とする。

$$\frac{dy}{dx} = y$$

解法 V-5-1

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{11}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 \tag{12}$$

両辺を x で積分する。

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx = \int dx \tag{13}$$

置換積分の定理より

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx \quad (14)$$

$$\ln |y| + C_1 = x + C_2 \quad (15)$$

左辺の積分定数を右辺に移項し $C_2 - C_1 = C_3$ とあらわすと

$$\ln |y| = x + C_3 \quad (16)$$

指数関数であらわし

$$|y| = \exp(x + C_3) \quad (17)$$

指数法則により

$$|y| = \exp(C_3) \exp(x) \quad (18)$$

$C > 0$ を使い $\exp(C_3) = C$ とあらわすと

$$|y| = C \exp(x) \quad ; C > 0 \quad (19)$$

5.3 マルサスモデル

ある生物の個体数・個体群サイズの指数関数的な増加を記述する数理モデル。1798 年トマス・マルサス「人口論」で発表されたモデル。

マルサスモデルでは、ある生物の個体数 P の増加速度が個体数自体に比例するとして次式で個体数増加速度 $\frac{dP}{dt}$ をあらわす。

$$\frac{dP}{dt} = mP \quad (20)$$

ここで t は時間、 m は定数である。発案者に因み係数 m をマルサス係数とよぶ。

問題 V-5-1

次の微分方程式の一般解を求めなさい。ただし、 $P > 0$ とする。

$$\frac{dP}{dt} = mP$$

解例 V-5-1

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= mP \\ \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} &= m\end{aligned}$$

両辺を t で積分する。

$$\int \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} dt = \int m dt$$

置換積分の定理より

$$\int \frac{1}{P} dP = \int m dt$$

$$\ln P = mt + C_1$$

$$P = \exp(mt + C_1)$$

$$P = \exp(mt) \exp(C_1)$$

$C > 0$ をつかい $\exp(C_1) = C$ とあらわすと

$$P = C \exp(mt) \quad ; C > 0$$

マルサスモデルの解

(20) を解くと

$$P = C \exp(mt) \quad ; C > 0 \tag{21}$$

を得る。個体数 P は時間 t を冪数としてもつ指数関数なので、 $m > 0$ とすると、 t の増加に従い指数関数的に増加するモデルである。

5.4 ロジスティックモデル

マルサスモデルでは無制限な個体数の指数関数的増加が続くと仮定しているが、これに対し一定の上限を加えたモデルがロジスティック方程式である。ここで、 K を『環境収容力』とよび、個体数の最大定員とする。

$$0 < P < K \quad (22)$$

であって、

$$P \rightarrow 0 \implies \frac{K - P}{K} \rightarrow 1 \quad (23)$$

$$P \rightarrow K \implies \frac{K - P}{K} \rightarrow 0 \quad (24)$$

である。この

$$\frac{K - P}{K} \quad (25)$$

により定数 m を調整するモデルがロジスティック方程式である。

$$\frac{dP}{dt} = m \left(\frac{K - P}{K} \right) P \quad (26)$$

5.4.1 ロジスティックモデルの導出

ロジスティック方程式 (26) を変形する。

$$\frac{dP}{dt} = m \left(\frac{K - P}{K} \right) P \quad (26)$$

$$\frac{dP}{dt} = m \left(\frac{(K - P)P}{K} \right) \quad (27)$$

$$\frac{K}{(K - P)P} \frac{dP}{dt} = m \quad (28)$$

両辺を t で積分すると

$$\int \frac{K}{(K - P)P} \frac{dP}{dt} dt = \int m dt \quad (29)$$

置換積分の定理より

$$\int \frac{K}{(K - P)P} dP = \int m dt \quad (30)$$

左辺、積分記号内の分数を部分分数分解により分数の和に分け

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{(K - P)} \right) dP = \int m dt \quad (31)$$

両辺をそれぞれ積分し

$$\ln P - \ln(K - P) = mt + C \quad (32)$$

両辺に (-1) をかけ、

$$\ln(K - P) - \ln P = -(mt + C) \quad (33)$$

左辺の対数の差を真数の商であらわし

$$\ln \frac{K - P}{P} = -(mt + C) \quad (34)$$

指数関数であらわし

$$\frac{K - P}{P} = \exp(-(mt + C)) \quad (35)$$

左辺の分子にそれぞれ分母をもたせ、約分し

$$\frac{K}{P} - \frac{P}{P} = \exp(-(mt + C)) \quad (36)$$

左辺第二項を右辺へ移項し

$$\frac{K}{P} = 1 + \exp(-(mt + C)) \quad (37)$$

両辺の逆数を取り

$$\frac{P}{K} = \frac{1}{1 + \exp(-(mt + C))} \quad (38)$$

を得る。左辺は、環境収容力に占める現在の個体数の比率であり、全体に占める対象の比率をあらわしている。ここで対象を $y = 1$ の事象、と $y = 0$ の事象とみなせば頻度主義による確率である。

そこで左辺を p とし、変数をあらわす記号を t から x に改め、 C, m をパラメータ α, β とするとロジスティックモデル

$$p_i = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha + \beta x_i))} \quad (39)$$

を得る。

5.5 まとめ

- 変数分離型の微分方程式の解き方を理解した。
- 変数分離型の微分方程式において利用しているのは置換積分の定理。
- ロジスティック方程式はある個体の個体数を推定するモデル。
- ロジスティック方程式を変形しロジスティックモデルは導出されている。