

第 IV 部 冪乗モデル

8 e が無理数であること

ポイント

- 高階微分
- Maclaurin 展開

- 無限級数の和

8.1 はじめに

- 必要な知識を持っていれば結論は容易に導くことができます。
- 問題は、必要な知識がどれか事前にわからないことです。
- とりあえず必要そうな知識を集めておきました。

8.2 高階導関数

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が更に微分可能であれば、 $f'(x)$ の導関数を求めることができる。
 $f'(x)$ の導関数を

$$f''(x), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, (f'(x))'' \quad (1)$$

などの記号であらわす。その定義は

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

である。 $f''(x)$ を $f(x)$ の『2階導関数』あるいは『2次導関数』という。

$f''(x)$ の $x = a$ における値を $f''(a)$ とかく。 $f''(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ における『2 階微分係数』あるいは『2 次微分係数』という。

$f''(x)$ がさらに微分可能であれば、同様にして 3 階もしくはそれ以上の階数の導関数を定義することができる。それらをあらわす記号は、3 階の導関数は $f'''(x)$ を使うが、それ以上の導関数は

$$f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots \quad (3)$$

のように、 f の右肩に微分の回数を示す数字を括弧書きで書き添えた形を使う。当然、3 次以下の導関数において同様の記号を使うこともできる。

$f^{(n)}(x)$ はまた

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \quad (5)$$

$$(f(x))^{(n)} \quad (6)$$

とあらわす時もある。

これらの記号の中で、 $f(x)$ の x を $x = a$ とおけば、 $x = a$ における n 階 (n 次) 微分係数が得られる。

定義

関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとする。 n 階導関数を次式で定義する。

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \quad (7)$$

8.2.1 $(f(x) + g(x))^{(n)}$

関数 $f(x)$, $g(x)$ が共に n 回微分可能とする。 $f(x) + g(x)$ に直接微分を繰り返し $(f(x) + g(x))^{(n)}$ を求めてみる。

1 次の場合は微分の公式により

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x) \quad (8)$$

である。そして 2 次の場合は

$$\left(f(x) + g(x)\right)'' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)\right)' - \left(f(x) + g(x)\right)'}{\Delta x} \quad (9)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) + g'(x + \Delta x) - f'(x) - g'(x)}{\Delta x} \quad (10)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} + \frac{g'(x + \Delta x) - g'(x)}{\Delta x} \right) \quad (11)$$

$$= f''(x) + g''(x) \quad (12)$$

3 次の場合

$$\left(f(x) + g(x)\right)''' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)\right)'' - \left(f(x) + g(x)\right)''}{\Delta x} \quad (13)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f''(x + \Delta x) + g''(x + \Delta x) - f''(x) - g''(x)}{\Delta x} \quad (14)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x} + \frac{g''(x + \Delta x) - g''(x)}{\Delta x} \right) \quad (15)$$

$$= f'''(x) + g'''(x) \quad (16)$$

この計算を順次繰り返すと n 次導関数を得ることができる。本来これらの証明には数学的帰納法を用いるべきであるが明らかであろう。

n 次の場合

$$\left(f(x) + g(x)\right)^{(n)} \quad (17)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)\right)^{(n-1)} - \left(f(x) + g(x)\right)^{(n-1)}}{\Delta x} \quad (18)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) + g^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \quad (19)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} + \frac{g^{(n-1)}(x + \Delta x) - g^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \right) \quad (20)$$

$$= f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \quad (21)$$

8.2.2 $(\alpha f(x))^{(n)}$

関数 $f(x)$ が n 回微分可能とする。数学的帰納法を用いて

$$(\alpha f(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) \quad (22)$$

を証明する。

$n = 1$ のとき、微分の公式より (22) が成り立つのは明らか

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \quad (23)$$

$n = k - 1$ のとき (22) が成り立つと仮定する (帰納法の仮定)。

$$(\alpha f(x))^{(k-1)} = \alpha f^{(k-1)}(x) \quad (24)$$

この式を微分すると

$$\left(\alpha f(x)\right)^{(k)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\alpha f(x + \Delta x)\right)^{(k-1)} - \left(\alpha f(x)\right)^{(k-1)}}{\Delta x} \quad (25)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \left(f(x + \Delta x)\right)^{(k-1)} - \alpha \left(f(x)\right)^{(k-1)}}{\Delta x} \quad (26)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \frac{\left(f(x + \Delta x)\right)^{(k-1)} - \left(f(x)\right)^{(k-1)}}{\Delta x} \quad (27)$$

$$= \alpha f^{(k)}(x) \quad (28)$$

が得られる。これで帰納法は完結し、全ての自然数 (n) に対して (22) は成立する。(終)

定理 IV-8-1

$f(x), g(x)$ が n 回微分可能であれば次式が成立する。

$$(i) \quad \left(f(x) + g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \quad (29)$$

$$(ii) \quad (\alpha f(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) \quad (30)$$

8.2.3 $(f(x)g(x))^{(n)}$

関数 $f(x)$, $g(x)$ それぞれが n 回微分可能とする。式を見やすくするために $f(x)$, $g(x)$ は x を省略して f , g であらわすことにする。

微分の公式より

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (31)$$

である。

これを利用すると

$$(fg)'' = (f'g + fg')' \quad (32)$$

$$= (f'g)' + (fg')' \quad (33)$$

$$= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') \quad (34)$$

$$= f''g + f'g' + f'g' + fg'' \quad (35)$$

$$= f''g + 2f'g' + fg'' \quad (36)$$

$$(fg)''' = (f''g + 2f'g' + fg'')' \quad (37)$$

$$= f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' \quad (38)$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \quad (39)$$

を得る。

これらの形から右辺の係数は 2 項定理の展開式の係数と同じになっていることが予想される。

定理 IV-8-2 (Leibniz の公式)

$f(x)$, $g(x)$ が共に n 回微分可能であれば次の関係式が成立する。

$$\left(f(x) g(x)\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^n {}_n C_r f^{(n-r)}(x) g^{(r)}(x) \quad (40)$$

ただし、 $f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$ とする。

証明

※ 引き続き $f(x)$, $g(x)$ は x を省略して f , g であらわす。

$n = 1$ のときは定理は確かに成立する。

$n = k - 1$ のとき

$$(f g)^{(k-1)} = \sum_{r=0}^{k-1} {}_{k-1}C_r f^{(k-1-r)} g^r \quad (41)$$

が成り立つものと仮定する（帰納法の仮定）。(41) の両辺を微分すると

$$(f g)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} {}_{k-1}C_r \left(f^{(k-r)} g^r + f^{(k-1-r)} g^{r+1} \right) \quad (42)$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1} {}_{k-1}C_r f^{(k-r)} g^r + \sum_{r=0}^{k-1} {}_{k-1}C_r f^{(k-1-r)} g^{r+1} \quad (43)$$

となる。

(43) 後半部分で、 $r + 1 = s$ とすると $r = (s - 1)$ なので

$$\sum_{r=0}^{k-1} {}_{k-1}C_r f^{(k-1-r)} g^{(r+1)} = \sum_{(s-1)=0}^{k-1} {}_{k-1}C_{(s-1)} f^{(k-1-(s-1))} g^{((s-1)+1)} \quad (44)$$

$$= \sum_{s=1}^k {}_{k-1}C_{s-1} f^{(k-s)} g^{(s)} \quad (45)$$

ここで s のかわりに r を使うと

$$= \sum_{r=1}^k {}_{k-1}C_{r-1} f^{(k-r)} g^{(r)} \quad (46)$$

とあらわすことができる。

したがって、(43) は

$$(fg)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} {}_{k-1}C_r f^{(k-r)} g^{(r)} + \sum_{r=1}^k {}_{k-1}C_{r-1} f^{(k-r)} g^{(r)} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} &= {}_{k-1}C_0 f^{(k)} g + \sum_{r=1}^{k-1} {}_{k-1}C_r f^{(k-r)} g^{(r)} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} {}_{k-1}C_{r-1} f^{(k-r)} g^{(r)} + {}_{k-1}C_{k-1} f^{(0)} g^{(k)} \end{aligned} \quad (48)$$

$$= f^{(k)} g + \sum_{r=1}^{k-1} \left({}_{k-1}C_r + {}_{k-1}C_{r-1} \right) f^{(k-r)} g^{(r)} + f g^{(k)} \quad (49)$$

である。

ここで

$${}_{k-1}C_r + {}_{k-1}C_{r-1} = \frac{(k-1)!}{r!(k-1-r)!} + \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-1-(r-1))!} \quad (50)$$

$$= \frac{(k-1)!}{r!(k-r-1)!} + \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} \quad (51)$$

$$= \frac{(k-r) \times (k-1)!}{r! \times (k-r) \times (k-r-1)!} + \frac{r \times (k-1)!}{r \times (r-1)! \times (k-r)!} \quad (52)$$

$$= \frac{(k-r) \times (k-1)! + r \times (k-1)!}{r!(k-r)!} \quad (53)$$

$$= \frac{((k-r) + r) \times (k-1)!}{r!(k-r)!} \quad (54)$$

$$= \frac{k \times (k-1)!}{r!(k-r)!} = \frac{k!}{r!(k-r)!} = {}_kC_r \quad (55)$$

なので (49) は

$$(fg)^{(k)} = f^{(k)}g + \sum_{r=1}^{k-1} {}_k C_r f^{(k-r)}g^{(r)} + fg^{(k)} \quad (56)$$

$$= \sum_{r=0}^k {}_k C_r f^{(k-r)}g^{(r)} \quad (57)$$

である。これで帰納法は完結し、定理の主張は全ての自然数に対して成立する。(終)

8.3 集積点

定義

数直線上に、無限点集合 S と 1 点 α をとる。点 α のどんな近傍をとっても、その近傍の中に S の点が無数に含まれるとき、 α を S の『集積点』という。

定理 IV-8-3

α を S の集積点とすれば α に収束する S の点列を選ぶことができる。

証明

α は S の集積点だから、 α のどんな近傍にも S の点が無数にある。そこで、

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots \quad ; \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (58)$$

となる正数列 $\{\varepsilon_n\}$ を選び、まず、 α の ε_1 -近傍の中から S の点を選ぶ。その点を a_1 とする。

次に、 α の ε_2 -近傍の中から、 a_1 と異なる S の点 a_2 を選ぶ。同様に続けて、各 n に対して、 α の ε_n -近傍の中から、すでに選んだ $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ と異なる点 a_n を選ぶ。

α の ε -近傍は S の点を無限に含むから、このような a_n を選ぶことができる。こうして得

られた点列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (59)$$

は

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon_n \quad (60)$$

を満たす。

$n \rightarrow \infty$ のとき $\varepsilon_n \rightarrow 0$ であるから、 $\{a_n\}$ は α に収束する。(終)

定理 IV-8-4

集合 S が下限あるいは上限をもつとし、下限を α 、上限を β とする。このとき、 $\alpha \notin S$ であれば α は S の集積点であり、 $\beta \notin S$ であれば β は S の集積点である。

証明

$\alpha \notin S$ とする。 α は下限すなわち最大の下界だから、どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、 $\alpha - \varepsilon$ は S の下界であり、また $\alpha + \varepsilon$ は S の下界にはならない。したがって、

$$\alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon \quad ; x \in S \quad (61)$$

となる x が必ずある。

そこで、 $\varepsilon_1 > 0$ を1つとり、

$$\alpha - \varepsilon_1 < x_1 < \alpha + \varepsilon_1 \quad ; x_1 \in S \quad (62)$$

となる x_1 をとる。 $x_1 \in S$; $\alpha \notin S$ だから

$$|x_1 - \alpha| > 0 \quad (63)$$

である。そこで

$$\varepsilon_2 = \min \left(|x_1 - \alpha|, \frac{1}{2} \right) \quad (64)$$

とおき、この ε_2 に対して

$$\alpha - \varepsilon_2 < x_2 < \alpha + \varepsilon_2 \quad ; x_2 \in S \quad (65)$$

となる x_2 をとる。

$$|x_2 - \alpha| < \varepsilon_2 \leq |x_1 - \alpha| \quad (66)$$

だから、

$$|x_2 - \alpha| < |x_1 - \alpha| \quad (67)$$

であって、

$$x_2 \neq x_1 \quad (68)$$

である。

次いで

$$\varepsilon_3 = \left(|x_2 - \alpha|, \frac{1}{3} \right) \quad (69)$$

とおき、この ε_3 に対して

$$\alpha - \varepsilon_3 < x_3 < \alpha + \varepsilon_3 \quad ; x_3 \in S \quad (70)$$

となる x_3 をとると、

$$|x_3 - \alpha| < \varepsilon_3 \leq |x_2 - \alpha| < |x_1 - \alpha| \quad (71)$$

だから

$$|x_3 - \alpha| < |x_2 - \alpha| < |x_1 - \alpha| \quad (72)$$

なので

$$|x_3 - \alpha| < |x_2 - \alpha| < |x_1 - \alpha| \quad (73)$$

であるから、 x_3 は x_1, x_2 とは異なる数である。以下同様にして $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, まで求めたとき

$$\varepsilon_n = \min \left(|x_{n-1}|, \frac{1}{n} \right) \quad (74)$$

とにおいて、この ε_n に対して

$$\alpha - \varepsilon_n < x_n < \alpha + \varepsilon_n \quad ; x_n \in S \quad (75)$$

となる x_n をとる。こうして、 S の異なる数からなる無限数列 $\{x_n\}$ を作ることができる。

その作り方から

$$|x_1 - \alpha| > |x_2 - \alpha| > \cdots > |x_n - \alpha| > \cdots \quad (76)$$

であって、しかも、全ての n に対して

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{n} \quad (77)$$

となっている。

$\varepsilon > 0$ を任意に与えて $\frac{1}{n} < \varepsilon$ となる n を $n(\varepsilon)$ とかけば、 $n > n(\varepsilon)$ を満たす全ての n に対して

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad ; x_n \in S \quad (78)$$

であるから、 α のどんな近くにも、無限に多くの $x_n \in S$ があることがわかる。よって α は S の集積点である。

β が集積点であることも、同様にして証明できる。(終)

定理 IV-8-5

集合 S の下限を α とすれば α に収束する S の点列がある。 S の上限を β とすれば β に収束する S の点列がある。

証明

S の下限 α が、 $\alpha \in S$ であれば、全ての項が α である点列をとれば、この点列は α に収束する。 $\alpha \notin S$ であれば α は S の集積点であるから、定理 IV-8-2 により α に収束する S の点列がある。上限についても同様である。(終)

8.4 部分列

定義

数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき、その数列から順次に 第 i_1 項, 第 i_2 項, $\dots$, 第 i_n 項, $\dots$ を抜き出して作られる無限数列

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, \dots \quad (79)$$

をもとの数列の『部分列』という。ここで、 $i_1 < i_2 < \dots < i_n < \dots$ である。

定理 IV-8-6

$\{a_n\}$ が収束する数列であれば、 $\{a_n\}$ のどんな部分列 $\{a_{i_\nu}\}$ も収束し、その極限はもとの数列 $\{a_n\}$ の極限と同じである。

証明

$\{a_n\}$ の極限を α とする。このとき、任意に $\varepsilon > 0$ をとれば、ある番号 n_ε が定まって、 $n > n(\varepsilon)$ であるすべての n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる。したがって、部分列 a_{i_ν} に対しても、 $i_\nu > n(\varepsilon)$ を満たす全ての i_ν に対して、 $|a_{i_\nu} - \alpha| < \varepsilon$ が成立している。このことは $\{a_{i_\nu}\}$ が α に収束することを示している。(終)

8.5 数列の上極限と下極限

数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (80)$$

は有界であるとする。この数列の第 n 項から先だけをとった部分数列を S_n とする。すなわち

$$S_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \quad (81)$$

とおく。

元の数列 $\{a_n\}$ が有界だから部分数列 S_n も有界であり、従って S_n は下限と上限を持つ。

下限を α_n 、上限を β_n とすれば $\alpha_n \leq \beta_n$ であって

$$S_n \supset S_{n+1} \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (82)$$

であるから $\{\beta_n\}$ は単調非増加数列であり、 $\{\alpha_n\}$ は単調非減少数列である。そして

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \quad (83)$$

が成立する。よって $\{\beta_n\}$ は下に有界になるから収束して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta \quad (84)$$

となる極限 β が存在する。

この極限 β を数列 $\{\beta\}$ の上極限^{じょうきょくげん}といい、記号

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (85)$$

であらわす。同様に、数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad (86)$$

となる極限 α が存在する。この極限 α を数列 $\{a_n\}$ の下極限^{かきょくげん}といい、記号

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (87)$$

であらわす。

当然、 $\alpha \leq \beta$ すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (88)$$

である。 $\alpha = \beta$ のとき数列 a_n は収束し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \beta \quad (89)$$

となる。

8.5.1 下極限と上極限の性質

数列 $\{a_n\}$ の部分数列

$$S_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \quad (90)$$

の下限が α_n であり、

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad (91)$$

であるから、すべての n に対して

$$\alpha_n \leq \alpha \quad (92)$$

すなわち

$$0 \leq \alpha - \alpha_n \quad (93)$$

である。しかも、数列 $\{\alpha_n\}$ は上に有界であって、単調非減少数列だから収束する。

収束するから任意に ε を与えたとき、 n を十分大きくとれば、

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \quad (94)$$

である。これらをあわせて

$$0 \leq \alpha - \alpha_n < \varepsilon \quad (95)$$

すなわち

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n \quad (96)$$

が成立する。

また、 α_n は S_n の下界であるから

$$\text{すべての } \nu \geq n \text{ に対して } \alpha_n \leq \alpha_\nu \quad (97)$$

である。よって

$$\text{十分大きなすべての } \nu \text{ に対して } \alpha - \varepsilon < \alpha_\nu \quad (98)$$

が成立する。

また、 a_n は S_n の最大の下界であるから、 $\alpha_n + \varepsilon$ は S_n の下界にはならない。したがって、 S_n の中には α_n より小さい項が少なくとも 1 つはある。

すなわち、どの n に対しても、少なくとも 1 つ

$$a_\nu < a_n + \varepsilon \quad ; \nu \geq n \quad (99)$$

をみたす $a_\nu \in S_n$ がある。この a_ν は、 $\alpha_n \leq \alpha$ から

$$a_\nu < \alpha + \varepsilon \quad ; \nu \geq n \quad (100)$$

をみたす。こうして、任意に $\varepsilon > 0$ を与えたとき、この ε に対して

「どの S_n の中にも (100) をみたす a_ν が少なくとも 1 つある」
ことが示された。

ここで、 S_1 の中から (100) をみたす a_{i_1} を 1 つ選ぶ。

数列 $\{a_i\}$ の第 n 項から先だけをとった部分数列が S_n なので、

$$S_{i_1} = \{a_{i_1}, a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, a_{i_1+3}, \dots\} \quad (101)$$

$$S_{i_1+1} = \{a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, a_{i_1+3}, \dots\} \quad (102)$$

である。この a_{i_1} は S_{i_1+1} には含まれない。

次に S_{i_1+1} の中から (100) をみたす a_{i_2} を 1 つ選ぶ。 a_{i_1}, a_{i_2} は S_{i_2+1} には含まれない。さらに S_{i_2+1} の中から (100) をみたす a_{i_3} を選ぶ。

この操作を続けて a_n の部分列

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\nu}, \dots \quad ; i_1 < i_2 < \dots < i_\nu < \dots \quad (103)$$

を選ぶ。どの a_{i_ν} も (100) をみたすことと (98) から、十分大きなすべての i_ν に対して

$$\alpha - \varepsilon < a_{i_\nu} < \alpha + \varepsilon \quad (104)$$

が成り立つことがわかる。このことは

「 α の ε -近傍には $\{a_n\}$ の無限に多くの項が含まれる」

ことを示している。

そこで 0 に収束する正数列

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_\nu > \dots \quad ; \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu = 0 \quad (105)$$

を選び、まず、 α の ε_1 -近傍に含まれる項 a_{k_1} を選ぶ。次いで α の ε_2 -近傍に含まれる項 a_{k_2} で $k_1 < k_2$ となっているものを選ぶ。 α の ε_2 -近傍には $\{a_n\}$ の項が無限に含まれているから、このような a_{k_2} を選ぶことができる。以下同様に続けて、次々に、 α の ε_ν -近傍の中から項 a_{k_ν} で

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_\nu \quad (106)$$

を満たすものを選んでゆく。

このようにして選ばれた $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{k_\nu}\}$; $\nu = 1, 2, \cdots$ は

$$|a_{k_\nu} - \alpha| < \varepsilon_\nu \quad ; \nu = 1, 2, \cdots \quad (107)$$

をみたす。 ε_ν は 0 に収束する正数列なので、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ である。したがってこの

部分列 $\{a_{k_\nu}\}$ は $\nu \rightarrow \infty$ のとき α に収束する。

こうして $\{a_n\}$ の中から

「下極限 α に収束する部分列を選ぶことができる」

ことがわかった。

ところで「 α より小さい数に収束する部分列は存在しない」

$\alpha' < \alpha$ とし ε を

$$0 < \varepsilon < \alpha - \alpha' \quad (108)$$

となるように選ぶ。このとき

$$\alpha' < \alpha - \varepsilon \quad (109)$$

であるが、この $\alpha - \varepsilon$ に (100) の結果を使うと、十分大きな ν に対して

$$\alpha - \varepsilon < a_\nu \quad (110)$$

である。

したがって数列 $\{a_n\}$ のどんな部分列をとっても、その十分先の方の項は全て $\alpha - \varepsilon$ より大きいから、その極限も $\alpha - \varepsilon$ より小さくはならない。したがって、 $\alpha - \varepsilon$ より小さい α' に収束することはあり得ないのである。

上極限 β についても同様である。これらを定理としてまとめる。

定理 IV-8-7

有界な数列の下極限を α とすれば、 α に収束する部分列を選ぶことができる。また、上極限を β とすれば、 β に収束する部分列を選ぶことができる。 α より小さい数、 β より大きい数に収束する部分列は存在しない。

定理 IV-8-8

有界な数列は収束する部分列を含む。

証明

有界な数列ならば上極限（または下極限）に収束する部分列を選ぶことができるのだから、有界な数列が収束する部分列を含んでいるのは明らかである。（終）

8.6 最大値・最小値の定理

定理 IV-8-9(最大値・最小値の定理)

閉区間 $[a, b]$ で $f(x)$ が連続であれば、 $f(x)$ はこの区間のどこかで最大値をとる。またどこかで最小値をとる。

証明

はじめに $f(x)$ が $[a, b]$ で有界であることを示す。そのために有界でないと仮定してみる。このとき $[a, b]$ に属する点列 $\{x_n\}$ で

$$|f(x_n)| > n \quad (111)$$

を満たすものを選ぶことができる。 $\{x_n\}$ は $[a, b]$ に含まれるから有界数列であり、従って定理 IV-8-3 により収束する部分列を含む。その部分列を $\{x_{i_\nu}\}$ とし、 $\{x_{i_\nu}\}$ の極限を x_0 とすれば、全ての i_ν について $a \leq x_{i_\nu} \leq b$ で $x_{i_\nu} \rightarrow x_0$ であるから $a \leq x_0 \leq b$ となる。よって $x_0 \in [a, b]$ である。

添え字の数列 $\{i_\nu\}$ は

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_{i_\nu} < \cdots \quad ; i_\nu \rightarrow \infty \quad (112)$$

であって、 x_n の選び方から

$$|f(x_{i_\nu})| > i_\nu \quad (113)$$

となっている。よって、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき、 $x_{i_\nu} \rightarrow x_0$ であり、

$$|f(x_{i_\nu})| \rightarrow \infty \quad (114)$$

となる。

他方 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続であり、 $x_{i_\nu} \rightarrow x_0$, $x_0 \in [a, b]$ であるから $\nu \rightarrow \infty$ のとき

$$|f(x_{i_\nu})| \rightarrow |f(x_0)| < \infty \quad (115)$$

でなくてはならない。これは矛盾である。よって $f(x)$ は有界である。

$f(x)$ が $[a, b]$ で有界だから、集合

$$S = \{f(x) | x \in [a, b]\} \quad (116)$$

は有界であり、 S は上限と下限をもつ。そこで

$$\sup S = M, \quad \inf S = m \quad (117)$$

とおく。

このとき

$$f(x^*) = M, \quad f(x_*) = m \quad ; x^*, x_* \in [a, b] \quad (118)$$

となる x^*, x_* が存在することを示す。

はじめに $f(x^*) = M$ となる $x^* \in [a, b]$ の存在を示す。

M は S の上限だから定理 IV-8-3 により、 M に収束する S の数列

$$\{f(x_n)\} \quad ; x \in [a, b] \quad (119)$$

がある。

このとき、数列 $\{x_n\}$ は収束する部分列を含むから、その部分列を $\{x_{i_\nu}\}$ とし、極限を x^* とすれば、 $a \leq x_{i_\nu} \leq b$ であるから $a \leq x^* \leq b$ となる。

よって、 $x^* \in [a, b]$ である。 $x_{i_\nu} \rightarrow x^*$ であり、 $f(x)$ は x^* で連続だから

$$f(x_{i_\nu}) \rightarrow f(x^*) \quad (120)$$

となるが、 $f(x_{i_\nu})$ は M に収束する数列 $\{f(x_n)\}$ の部分列だから、 $f(x_{i_\nu})$ もまた M に収束

する。すなわち

$$f(x_{i_\nu}) \rightarrow M \quad (121)$$

が成立する。よって

$$f(x^*) = M \quad ; x^* \in [a, b] \quad (122)$$

となる x^* がある。

同様にして

$$f(x_*) = m \quad ; x_* \in [a, b] \quad (123)$$

となる x_* の存在も示すことができる。(終)

8.7 平均値の定理

定理 IV-8 – 10 Rolle の定理

関数 $f(x)$ が开区間 (a, b) で微分可能、閉区間 $[a, b]$ で連続であって、

$$f(a) = f(b) \quad (124)$$

ならば、 a と b の間に

$$f'(c) = 0 \quad ; a < c < b \quad (125)$$

となる点 c が存在する。

証明

$f(a) = f(b) = k$ とおく。

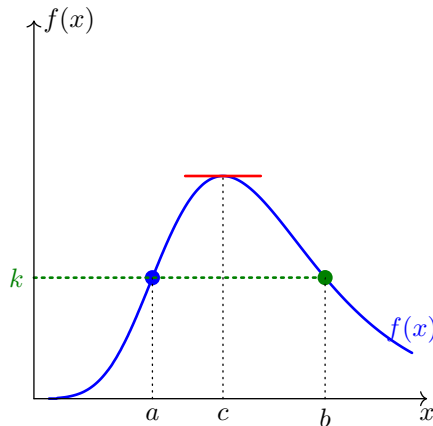
区間 $[a, b]$ で恒等的に $f(x) = k$ である場合には、どんな

$$c \quad ; a < c < b \quad (126)$$

をとっても $f'(c) = 0$ だから、定理は確かに成立する。

そこで (a, b) 内に $f(x) > k$ となる点 x がある場合を考える。

図1 傾きが0となる点



仮定により $f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから、定理 IV-8-7(最大値、最小値の定理)により、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ に属する点のどこかで最大値をとる。その点を c とすれば

$$f(c) > k = f(a) = f(b) \quad (127)$$

であるから $a < c < b$ である。

$\Delta x \neq 0$ を $c + \Delta x \in [a, b]$ となるようにとれば、 $f(c)$ が最大値であるから

$$f(c) \geq f(c + \delta x) \quad (128)$$

が成立する。

そこで

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \quad (129)$$

をつくれば (128) により

$$f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0 \quad (130)$$

であるから

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad ; \Delta x > 0 \text{ のとき} \quad (131)$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad ; \Delta x < 0 \text{ のとき} \quad (132)$$

となる。

ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ のときの右側極限、左側極限をとれば、(131)(132) により

$$\Delta x > 0, \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad f'(c+0) \leq 0 \quad (133)$$

$$\Delta x < 0, \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad f'(c-0) \geq 0 \quad (134)$$

であるが、 $f(x)$ は点 c で微分可能だから $f'(x)$ は存在し

$$f'(c) = f'(c+0) = f'(c-0) \quad (135)$$

である。よって、(133)(134) により、

$$f'(c) = 0 \quad (136)$$

である。

$f(x) > k$ となる x が (a, b) 内に存在しない場合は $f(x) < k$ となる $x \in (a, b)$ があるから、このときは $f(x)$ が $[a, b]$ で最小値をとる点は必ずあり、その点を c とすれば、 $a < c < b$ であって、ここで $f'(c) = 0$ となることが同様に証明できる。(終)

8.8 Taylor 展開

定理 IV-8-11 テーラーの定理

$f(x)$ は 2 点 $a, b, (a \neq b)$ を含む区間で n 回微分可能とする。このとき a と b の中間に次の関係式を満たす c が存在する。

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^r}{r!}f^{(r)}(a) \\ + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c) \quad (137) \end{aligned}$$

ここで $c = a + \theta(b-a) \quad ; 0 < \theta < 1$

証明

(137) を

$$f(b) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) \quad (138)$$

$$\text{ここで、} f^{(0)}(a) = f(a) \quad (139)$$

とかいて、この (138) を満たす c があることを示す。そのために関数 $F(x)$ を次式で定義する。

$$F(x) = f(b) - \left(\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(b-x)^r}{r!} f^{(r)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} K \right) \quad (140)$$

右辺の K は定数である。この $F(x)$ は (137) の右辺の a を x で置き換え、 $f^{(n)}(c)$ を K で置き換えた式を左辺から引いたものになっている。

$f(x)$ は n 回微分可能であり、(140) の右辺に含まれている $f(x)$ の導関数は $f^{(n-1)}(x)$ ま
でだから、(140) 右辺は、あと 1 回は微分可能である。したがって $F(x)$ は微分可能である。
(140) の右辺は $x = b$ とおけば、(140) の右辺第 2 項括弧中のそれぞれの分数部分の分子が 0
になる。そして (140) の右辺第 2 項は (138) 右辺であるから、(138) も 0 である。したがって
 $f(b) = 0$ だから、(140) 右辺は 0 になるから $F(b) = 0$ である。

また (140) の両辺で $x = a$ とおけば、右辺は K の一次式になるから $F(a) = 0$ と置いた式は
 K に関する一次式になり、 K の係数 $\frac{(b-a)^n}{n!}$ は 0 ではないから、 $F(a) = 0$ を満たす K の値
はただ 1 つ確定する。

そこで K を $F(a) = 0$ を満たすようにえらんでおく。

そうすれば

$$F(a) = F(b) = 0 \quad (141)$$

が成り立つから $F(x)$ は Rolle の定理の仮定をすべて満たす。

したがって Rolle の定理により、 a と b の間に

$$F'(c) = 0 \quad (142)$$

となる c がある。

$F'(c)$ を計算するためにまず $F'(x)$ を計算する。(140) の右辺のそれぞれの項を微分する。

(140) の右辺第一項は定数なので導関数は 0 である。

$r = 0$ のときは

$$\left(\frac{(b-x)^0}{0!} f^{(0)}(x) \right)' = (f(x))' = f^{(1)}(x) \quad (143)$$

$r \geq 1$ のときは

$$\left(\frac{(b-x)^r}{r!} f^{(r)}(x) \right)' = \left(\frac{(b-x)^r}{r!} \right)' f^{(r)}(x) + \frac{(b-x)^r}{r!} \left(f^{(r)}(x) \right)' \quad (144)$$

$$= -\frac{r(b-x)^{r-1}}{r(r-1)!} f^{(r)}(x) + \frac{(b-x)^r}{r!} f^{(r+1)}(x) \quad (145)$$

$$= -\frac{(b-x)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r)}(x) + \frac{(b-x)^r}{r!} f^{(r+1)}(x) \quad (146)$$

である。これらの $r = 1$ から $n - 1$ までの和を作る。

そして、(140) の右辺括弧内第二項の導関数は

$$\left(\frac{(b-x)^n}{n!} K \right)' = -\frac{n(b-x)^{n-1}}{n!} K \quad (147)$$

$$= -\frac{n(b-x)^{n-1}}{n(n-1)!} K \quad (148)$$

$$= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} K \quad (149)$$

である。

これらに負号を掛け足し合わせると、

$$\begin{aligned}
 F'(x) = & -f^{(1)}(x) + \left(f^{(1)}(x) - (b-x)f^{(2)}(x)\right) + \left((b-x)f^{(2)}(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f^{(3)}(x)\right) \\
 & + \left(\frac{(b-x)^3}{3!}f^{(4)}(x) - \frac{(b-x)^4}{4!}f^{(5)}(x)\right) + \cdots + \left(\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right) \\
 & + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}K
 \end{aligned} \tag{150}$$

$$= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}K \tag{151}$$

$$= \left(K - f^{(n)}(x)\right) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{152}$$

となる。

したがって、 $F'(c) = 0$ となる点では

$$\left(K - f^{(n)}(c)\right) \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \quad (153)$$

が成立する。ここで $c \neq b$ であるから

$$K = f^{(n)}(c) \quad (154)$$

となる。すなわち、 $F(a) = 0$ となるように選んだ K は $f^{(n)}(c)$ とかけるのである。そこで (140) の右辺で $x = a$ とおき、 $K = f^{(n)}(c)$ とおけば

$$F(a) = f(b) - \left(\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) \right) = 0 \quad (155)$$

が当然成り立つ。(155) 中央部分及び最右辺より (138) が成り立つ。(終)

ここで、(138) において a を固定し b を変数と考えて b を x で置き換え、 c を ξ で置き換えると

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (156)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (x-a)^r + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n \quad (157)$$

を得る。(157) の最後の項

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n \quad (158)$$

は『Lagrange の余剰』と呼ばれている。また (157) を $f(x)$ の $x=a$ における『Taylor 展開』という。(157) において $a=0$ のときは次の定理になる。

定理 IV-8-12(Maclaurin の定理)

$f(x)$ が $x = 0$ を内部に含む区間で n 回微分可能であって、 $f^{(n)}$ がこの区間で連続であれば、この区間内の任意の x に対して

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} x^r + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad (159)$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad (160)$$

が成立する。ここで $0 < \theta < 1$ である。

(159) を $f(x)$ の『Maclaurin 展開』という。

8.9 無限級数

$f(x)$ が何回でも微分可能である場合を考える。すると (157) 右辺の n をいくらでも大きくすることができる。そこで $n \rightarrow \infty$ とすると右辺は無限数列の和になるが、この場合には無限級数の和が存在するかどうかという問題が生じる。

定義

無限数列 $\{a_n\}$ の各項の和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (161)$$

を『無限級数』という。

無限級数の n 項までの和を

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (162)$$

としたとき、数列

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots \quad (163)$$

が収束するならば、その極限

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (164)$$

を (161) の『無限級数の和』と定義する。

定義に従い (159) の右辺で $n \rightarrow \infty$ としたときの無限和が存在するための条件を調べる。

(159) の右辺で $n \rightarrow \infty$ とすると形式的には

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} x^r \quad (165)$$

となる。

ところでこの無限級数の n 項までの部分和 s_n は

$$\sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} x^r \quad (166)$$

である。

これは (159) 右辺の最初部分であるから (159) は

$$f(x) = s_n + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad ; 0 < \theta < 1 \quad (167)$$

である。

したがって

$$\left| s_n - f(x) \right| = \left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \right| \quad (168)$$

となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f(x) \quad (169)$$

が成り立つための必要十分条件は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \right| = 0 \quad (170)$$

となることである。

つまり (170) となる x に対してのみ、(159) は無限級数展開

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} x^r \quad (171)$$

が可能になる。(171) 右辺を $f(x)$ の『Maclaurin 級数』という。

8.10 e の無限級数展開

定理 IV-8-13

関数 e^x が全ての実数 x に対して

$$e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (172)$$

と無限級数展開できる。

証明

$f(x) = e^x$ に対しては

$$f^{(r)}(x) = e^x, \quad f^{(r)}(0) = e^0 = 1 \quad ; r = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad (173)$$

なので (159) により

$$e^x = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x^r}{r!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \quad ; 0 < \theta < 1 \quad (174)$$

となる。ここで全ての x に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \right| = 0 \quad (175)$$

が成り立つことを示す。

まず、 $0 < \theta < 1$ であるから、全ての x に対して

$$\theta x \leq |x| \tag{176}$$

である。なので、

$$e^{\theta x} \leq e^{|x|} \tag{177}$$

が成立する。

x を任意に選んで固定する。この x に対して

$$|x| < N \tag{178}$$

となる自然数 N を選び、この N に対して $N < n$ を満たす n をとれば

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^N}{N!} \frac{|x|}{N+1} \cdots \frac{|x|}{N+n} < \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N} \quad (179)$$

が成立する。

ここで $\frac{|x|^N}{N!}$ は定数であり、 $\frac{|x|}{N} < 1$ であるから、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N} \rightarrow 0$ となって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \quad (180)$$

が成立する。

$n! > 0$ であって $|x|^n \geq 0$ なので

$$\frac{|x|^n}{n!} \geq 0 \quad (181)$$

なので

$$e^{\theta x} \frac{|x|^n}{n!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} \quad (182)$$

$$\frac{e^{\theta x}}{n!} |x|^n \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} \quad (183)$$

$$\left| \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} \quad (184)$$

である。このとき当然

$$0 \leq \left| \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} \quad (185)$$

である。

よって $n \rightarrow \infty$ のとき最右辺が 0 に収束するから

$$\left| \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \right| \rightarrow 0 \quad (186)$$

である。

x は任意であるが固定しているから $e^{|x|}$ は定数である。これで (175) が成り立つことが示されたから、(172) が成立する。

(172) で $x = 1$ とおけば、 e の無限級数展開

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \quad (187)$$

が得られる。(終)

8.11 e が無理数である証明

e が無理数であることを示す。数学的背理法を用い、 e が有理数であると仮定して矛盾を導く。 e を有理数と仮定すれば、 m, n を互いに素な自然数として $e = \frac{m}{n}$ とあらわすことができる。 e は自然数ではないから、 $n \neq 1$ したがって

$$n \geq 2 \tag{188}$$

である。このとき e の展開式 (187) から

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots \tag{189}$$

が成立する。

(189) の両辺に $n!$ を掛けると

$$\frac{m}{n}n! = n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots \right) \quad (190)$$

$$m(n-1)! = n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) + n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \cdots \right) \quad (191)$$

$$m(n-1)! = \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} \right) + n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \cdots \right) \quad (192)$$

となる。(192) の左辺は整数であり、右辺前半部分も整数であるから、右辺後半部分

$$n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \right) \quad (193)$$

も整数でなくてはならないが、この部分については

$$= \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots \quad (194)$$

$$= \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \quad (195)$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \quad (196)$$

が成り立つ。

(196) は、初項 $\frac{1}{n+1}$ 、公比 $\frac{1}{n+1}$ 、項数 $k \rightarrow \infty$ の等比数列の和である。

したがって、等比数列の和の公式により

$$\frac{1}{n+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^k}{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)} \quad (197)$$

ここで $k \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \rightarrow 0$ なので、(196) は

$$\frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)} \quad (198)$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{n} \quad (199)$$

$$= \frac{1}{n} \quad (200)$$

$n \geq 2$ なので

$$n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \quad (201)$$

が成り立つ。これは矛盾である。よって e は有理数ではありえない。(終)

8.12 まとめ

- ネイピア数 (e) は無理数である。
- (e) を Maclaurin 展開すると e の近似式を得る。
- $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$
- $f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$