

第 IV 部 冪乗モデル

7 $\sqrt[m]{n}$ の極限

ポイント

- 冪数
- 有理数への拡張時の問題

7.1 はじめに

- 何かを定義するのは自由です。
- ただ、定義したものが存在するのかは疑問です。
- 定義したものが存在するのかを確かめてみます。

7.2 定義と定理の確認

これまでの定義と定理を確認する。各定理の証明は省略する。

定義 1

$\mathbb{R}$ の部分集合 S をとる。このとき

$$\text{全ての } x \in S \text{ に対して } x \leq M \tag{1}$$

を満たす実数 M があればこの M を集合 S の『^{じょうかい}上界』という。

定義 2

$\mathbb{R}$ の部分集合 S をとる。このとき

$$\text{全ての } x \in S \text{ に対して } x \geq m \quad (2)$$

を満たす実数 m があればこの m を集合 S の『^{かかい}下界』という。

定義 3

集合 S が上界を持つとき、 S は『上に有界』であるといい、下界を持つとき『下に有界』であるという。上界と下界を共に持つとき、 S は『有界』であるという。

定義 4

集合 S が有界のとき、 S の最小の上界を S の『上限』といい、最小の下界を S の『下限』という。

集合 S の上限を

$$\sup S \tag{3}$$

とあらわし、下限を

$$\inf S \tag{4}$$

とあらわす。

定義 5

数直線上に点 α をとり、別に正数 ε をとって α を中心に ε の幅を持った开区間

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \quad (5)$$

をつくる。この开区間を α の『 ε -近傍』という。

ε -近傍は α からの距離が ε より近い点の全体であるから

$$\{x \mid |x - \alpha| < \varepsilon\} \quad (6)$$

とあらわすこともできる。

定理 III-3-1

集合 S が上に有界であれば S は上限を持つ。 S が下に有界であれば S は下限を持つ。

定理 IV-7-1

S を $\mathbb{R}$ の部分集合とする。

(i) $\alpha = \sup S$ であるための必要十分条件は

「全ての $x \in S$ に対して $x \leq \alpha$ であり、さらに、 $\beta < \alpha$ であるどんな β をとっても $\beta < x$ となる $x \in S$ が存在する」ことである。

(ii) $\alpha = \inf S$ であるための必要十分条件は

「全ての $x \in S$ に対して $\alpha \leq x$ であり、さらに、 $\alpha < \beta$ であるどんな β をとっても $x < \beta$ となる $x \in S$ が存在する」ことである。

定義 6

数列 $\{a_n\}$ と実数 α が与えられたとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 $n(\varepsilon)$ を

$$n > n(\varepsilon) \text{ を満たすすべての } n \text{ に対して } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (7)$$

が成り立つように選ぶことができるならば、その時、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい、 α を数列の『極限』という。

α の ε -近傍を用いれば (7) は以下のようにあらわすこともできる。

$$n > n(\varepsilon) \text{ を満たす全ての } n \text{ に対して } a_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \quad (8)$$

定義 7

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \quad (9)$$

となっているとき、この数列は『単調増加』であるといい

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \quad (10)$$

のとき、『単調非減少』であるという。

定理 IV-1-1

収束する数列は有界である。

定理 IV-1-2 (Weierstrass の定理)

数列 $\{a_n\}$ が単調で有界な数列は収束する。

定義 8

$a > 0$ の実数, n を自然数とする。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (11)$$

と定義する。

7.3 $\sqrt[n]{a}$ は存在するか？

上記の定義並びに定理を準備として $\sqrt[n]{a}$ すなわち $x^n = a$ となる正数 x が存在することを示す。

7.3.1 $a > 1$ の場合

次のような実数の集合 S を考える。

$$S = \{x \mid x^n \leq a, x > 0\} \quad (12)$$

$1^n = 1 < a$ であるから $1 \in S$ である。したがって $S \neq \emptyset$ である。

また $x \in S$ であれば、集合 S の定義により

$$x^n \leq a \quad (13)$$

である。また仮定により $a > 1$ なので

$$a < a^n \quad (14)$$

である。これらの関係から

$$x^n \leq a < a^n \quad (15)$$

が成り立つ。ここで最左辺と最右辺をとると

$$x^n < a^n \quad (16)$$

である。

したがって

$$x < a \quad (17)$$

となるから a は S の上界である。 S は上界を持つから有界である。したがって S は上限を持つ。

ここで

$$b = \sup S \quad (18)$$

とおく。

b は S の上限だから定理 IV-7-1 の (i) により、 $x < b$ を満たすどんな $x \in S$ に対しても、 $x < \tilde{x}$ となる $\tilde{x}$ があり、これに対して $x^n < \tilde{x}^n \leq a$ が成立する。つまり $x < b$ であれば $x^n < a$ である。

また、 $x \in S$ なら $x \leq b$ でなくてはならないから、 $b < x$ である x は S には含まれない。 S の定義により、 S に含まれない場合は

$$x^n > a \quad (19)$$

である。つまり $b < x$ であれば $a < x^n$ であ

る。これらのことから

$$x < b \quad \text{ならば} \quad x^n < a \quad (20)$$

$$b < x \quad \text{ならば} \quad a < x^n \quad (21)$$

が成立する。

$\varepsilon > 0$ を任意に与える。すると

$$b - \varepsilon < b \quad (22)$$

である。(20) において $x = b - \varepsilon$ とすると

$$b - \varepsilon < b \quad \text{ならば} \quad (b - \varepsilon)^n < a \quad (23)$$

である。

同様に

$$b < b + \varepsilon \quad (24)$$

なので (21) において $x = b + \varepsilon$ とすると

$$b < b + \varepsilon \quad \text{ならば} \quad a < (b + \varepsilon)^n \quad (25)$$

である。

これらを合わせて

$$b - \varepsilon < b < b + \varepsilon \quad (26)$$

ならば

$$(b - \varepsilon)^n < a < (b + \varepsilon)^n \quad (27)$$

が成り立つ。

ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、関数の連続性により $(b - \varepsilon)^n \rightarrow b^n$, $(b + \varepsilon)^n \rightarrow b^n$ となる。よって $b^n = a$ が成立する。

$b > 0$ は明らかなので $a > 1$ の場合の証明は終わる。

7.3.2 $a < 1$ の場合

$\frac{1}{a} > 1$ であるから $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ が存在する。存在するから逆数をとることができる。そこで $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ の逆数をとってみる。

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}} = \frac{1}{a^{\frac{-1}{n}}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (28)$$

この $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ が $\sqrt[n]{a}$ である。

7.3.3 $a = 1$ の場合

$\sqrt[n]{1} = 1$ である。(終)

7.3.4 まとめ

- $\sqrt[m]{n}$ の極限は存在する。
- 定義された値が存在するかの確認は重要。
- ただ、ここでの議論はあまりにも細かい。