

第Ⅳ部 冪乗モデル

6 冪乗モデルの多変数化

ポイント

- 仮定と結論の関係
- 逆数をとった値の変化率

- 影響力の比較

6.1 はじめに

- 大きな数値程、大きな価値を感じる場合があります。
- 小さな数値程、大きな価値を感じる場合があります。
- それらの違いは実は些細な事なのです。

6.2 点弾力性と冪乗モデル

6.2.1 点弾力性

y を微分可能な x の関数

$$y = f(x) \tag{1}$$

とする。点弾力性を $\dot{E}$ であらわし

$$\dot{E} = \frac{x}{f(x)} \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

と定義する。点弾力性 ($\dot{E}$) は点 x_i における x の変化率と y の変化率の比を返す関数である。

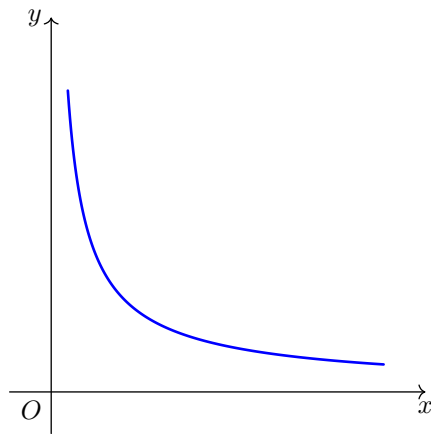
6.2.2 冪乗モデル

x を独立変数とし、定義域を $(0, +\infty)$ する。
また、 $\alpha > 0, \beta < 0$ とする。

$$y = \alpha x^{\beta} \quad (3)$$

を冪乗モデルと呼ぶ。冪乗モデルの値域は $(0, +\infty)$ である。

図1 冪乗モデルの形状



6.2.3 冪乗モデルを仮定した点弾力性

冪乗モデルを仮定した点弾力性 ($\dot{E}$) は以下の特徴を持つ。

- x の値に関わらず点弾力性 ($\dot{E}$) は一定である。
- 点弾力性 ($\dot{E}$) が弾力的であれば $S = xy$ は単調減少関数である。
- 点弾力性 ($\dot{E}$) が非弾力的であれば $S = xy$ は単調増加関数である。

6.2.4 線型モデルを仮定した点弾力性 (参考)

$y > 0, x > 0, \alpha > 0, \beta < 0$ とし、

$$y = \alpha + \beta x \quad (4)$$

とする。このモデルを線型モデルと呼ぶ。線型モデルを仮定して点弾力性 ($\dot{E}$) を求めてみる。

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta x)' = \beta \quad (5)$$

$$\dot{E} = \frac{x}{\alpha + \beta x} \beta = \frac{\beta x}{\alpha + \beta x} = \frac{\alpha + \beta x - \alpha}{\alpha + \beta x} = \frac{(\alpha + \beta x) - \alpha}{\alpha + \beta x} \quad (6)$$

分母を個別に持たせて

$$\dot{E} = \frac{\alpha + \beta x}{\alpha + \beta x} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta x} \quad (7)$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta x} \quad (8)$$

線型モデルを仮定すると点弾力性 ($\dot{E}$) は x の関数であって、その値は x によって変化する。

6.2.5 線型モデルの点弾力性 ($\dot{E}$) の範囲

ここで弾力的, 単位弾力的, 非弾力的な x の範囲を求めている。

弾力的な範囲

弾力的な場合の点弾力性 ($\dot{E}$) の範囲は

$$-1 > \dot{E} \quad (9)$$

である。線型モデルの点弾力性 (8) を代入すると

$$-1 > 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta x} \quad (10)$$

仮定により $\alpha > 0, \alpha + \beta x > 0$ なので

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta x} > 2 \quad (11)$$

$$\alpha > 2(\alpha + \beta x) \quad (12)$$

$$\alpha > 2\alpha + 2\beta x \quad (13)$$

$$-\alpha > 2\beta x \quad (14)$$

仮定により $\beta < 0$ なので

$$-\frac{\alpha}{2\beta} < x \quad (15)$$

次に上限を求める。仮定により $y > 0$ なので

$$\alpha + \beta x > 0 \quad (16)$$

$$\beta x > -\alpha \quad (17)$$

$\beta < 0$ なので

$$x < -\frac{\alpha}{\beta} \quad (18)$$

従って、点弾力性 ($\dot{E}$) が弾力的な範囲は

$$-\frac{\alpha}{2\beta} < x < -\frac{\alpha}{\beta} \quad (19)$$

である。

非弾力的な範囲

非弾力的な点弾力性 ($\dot{E}$) の範囲は

$$-1 < \dot{E} < 0 \quad (20)$$

である。

最初に上限を求める。最左辺と中央部分を抜き出し、点弾力性 (8) を代入すると

$$-1 < 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta x} \quad (21)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta x} < 2 \quad (22)$$

$$\alpha < 2(\alpha + \beta x) \quad (23)$$

$$\alpha < 2\alpha + 2\beta x \quad (24)$$

$$-\alpha < 2\beta x \quad (25)$$

$\beta < 0$ なので x の上限は、

$$x < -\frac{\alpha}{2\beta} \quad (26)$$

次に下限を求める。中央部分と最右辺から

$$1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta x} < 0 \quad (27)$$

$$1 < \frac{\alpha}{\alpha + \beta x} \quad (28)$$

$$\alpha + \beta x < \alpha \quad (29)$$

$$\beta x < 0 \quad (30)$$

$\beta < 0$ なので、 x の下限は、

$$0 < x \quad (31)$$

それぞれの結果を併せて非弾力的な範囲は

$$0 < x < -\frac{\alpha}{2\beta} \quad (32)$$

単位弾力的な点

単位弾力的な点弾力性 ($\dot{E}$) は

$$\dot{E} = -1 \quad (33)$$

なので、線型モデルの点弾力性 (8) を代入すると、

$$1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta x} = -1 \quad (34)$$

である。この式を整理すると

$$x = -\frac{\alpha}{2\beta} \quad (35)$$

を得る。

6.2.6 線型モデルを仮定した場合の示唆

- 点弾力性 ($\dot{E}$) は x によって異なり、全ての財は弾力的である範囲と非弾力的である範囲を持っている。
- $S = xy$ は、最大値を持つ上に凸の放物線である。
- S の最大値をもたらす x を x^* とすると、 x^* のとき点弾力性 ($\dot{E}$) は単位弾力的であり、 x^* 未満の場合は非弾力的であり、 x^* を超えると弾力的である。
- 点弾力性 ($\dot{E}$) が弾力的である範囲において、 S は単調減少関数であり、非弾力的である範囲において、 S は単調増加関数である。
- 仮定が変わると同じ論理であっても結論が変わる。

6.2.7 線型モデルと冪乗モデル

線型モデル

$$y = \alpha + \beta x = \alpha + \overbrace{x + x + \cdots + x}^{\beta} \quad (36)$$

は、 α に独立変数 x を β 回足し合わせたモデルである。

冪乗モデル

$$y = \alpha x^{\beta} = \alpha \times \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{\beta} \quad (37)$$

は、 α に独立変数 x を β 回掛け合わせたモデルである。

問題 IV-6-1

価格が 50% 値下がりした時に需要が 100% 増加したとする。需要の価格弾力性を求め変化前の売上を 1 とした時の変化後の売上を求めなさい。

問題 IV-6-2

価格が 100% 値上がりした時に需要が 50% 減少したとする。需要の価格弾力性を求め変化前の売上を 1 とした時の変化後の売上を求めなさい。

解例 IV-6-1

$$E = \frac{\text{需要の変化率}}{\text{価格の変化率}} = \frac{+100\%}{-50\%} = -2.0$$

価格の変化率は -50% なので 倍率に直すと 0.5 倍であり、需要の変化率は $+100\%$ なので倍率に直すと 2.0 倍である。

変化後の売上の倍率は、価格の倍率 0.5 倍 と 需要の倍率 2.0 倍 の積なので、

$$0.5 \times 2.0 = 1.0$$

である。変化前の売上を 1 とすると変化後の売上は 1.0 倍 なので 1 である。

解例 IV-6-2

$$E = \frac{\text{需要の変化率}}{\text{価格の変化率}} = \frac{-50\%}{+100\%} = -0.5$$

変化前の価格を x 変化前の需要を y とすると変化後の売上は

$$2.0x \times 0.5y = xy$$

である。変化前の売上 (xy) を 1 とすると、変化後の売上 (xy) も 1 である。

6.3 単調増加関数における点弾力性

- マーケティングミックスにおいて、マッカーシーの 4P を例にすると『プライス』以外の項目には『プロダクト』『プロモーション』がある。
- 『プロダクト』には「オファリングスの機能」、『プロモーション』には「オファリングスの情報」が含まれる。
- 「オファリングスの機能」「オファリングスの情報」においては需要との間に正の相関関係を想定し単調増加関数により定式化がなされるものがある。
- ここでは需要との間に正の相関関係を想定し、単調増加関数として定式化される変数における点弾力性を考察する。

6.3.1 狭義単調減少関数と狭義単調増加関数

狭義単調減少関数とは、

$$x_i < x_j \iff f(x_i) > f(x_j) \quad (38)$$

が成り立つ関数である。

一方、狭義単調増加関数とは、

$$x_i < x_j \iff f(x_i) < f(x_j) \quad (39)$$

となる関数である。

6.3.2 単調増加関数と単調減少関数の関係

$x_i < x_j$ である 2 つの正の値を考える。

$$x_i < x_j \iff \frac{1}{x_i} > \frac{1}{x_j} \quad (40)$$

である。したがって

$$x_i < x_j \iff f(x_i) < f(x_j) \quad (39)$$

ならば

$$\frac{1}{x_i} > \frac{1}{x_j} \iff f(x_i) < f(x_j) \quad (41)$$

である。

6.3.3 単調増加関数を仮定した変数への冪乗モデルの適用

x と y の間に単調増加関数を仮定した変数を冪乗モデルにあてはめる事を考える。冪乗モデルでは独立変数と従属変数との間には単調減少関数を仮定している。さらに独立変数は正であることを仮定している。そこで x の逆数を取り独立変数とすると

$$y = \alpha \left(\frac{1}{x} \right)^{\beta} \quad (42)$$

$$= \alpha (x^{-1})^{\beta} \quad (43)$$

$$= \alpha x^{-\beta} \quad (44)$$

である。

(44) 式を仮定し点弾力性を求めると

$$\dot{E} = \frac{x}{\alpha x^{-\beta}} (\alpha x^{-\beta})' \quad (45)$$

$$= \frac{x}{\alpha x^{-\beta}} \alpha (-\beta) x^{-\beta-1} \quad (46)$$

$$= \frac{\alpha (-\beta) x^{-\beta}}{\alpha x^{-\beta}} \quad (47)$$

$$= -\beta \quad (48)$$

を得る。

- x の逆数を独立変数とすると点弾力性 ($\dot{E}$) の符号が逆転する。
- x の逆数を独立変数にしても点弾力性の絶対値 ($|\dot{E}|$) は影響を受けない。

問題 IV-6-3

表の値を使い以下の問いに答えなさい。

1. x を独立変数とし、 y を従属変数とする。
冪乗モデルを仮定した点弾力性 $\dot{E}$ を求めなさい。
2. x の逆数を独立変数とし、 y を従属変数とする。冪乗モデルを仮定した点弾力性 $\dot{E}$ を求めなさい。

表 1 数値例 1

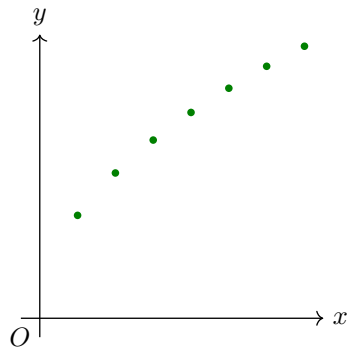
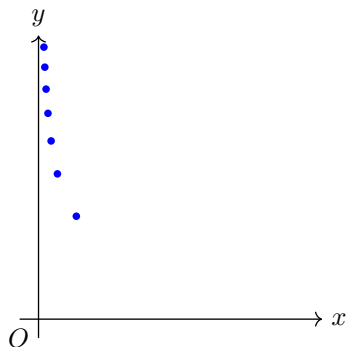
x	y
1	2.72
2	3.84
3	4.71
4	5.44
5	6.08
6	6.66
7	7.19

表2 x と y を真数とする自然対数

x	y	$\ln x$	$\ln y$
1	2.72	0.000 000	1.000 632
2	3.84	0.693 147	1.345 472
3	4.71	1.098 612	1.549 688
4	5.44	1.386 294	1.693 779
5	6.08	1.609 438	1.805 005
6	6.66	1.791 759	1.896 119
7	7.19	1.945 910	1.972 691

表3 x^{-1} と y を真数とする自然対数

x^{-1}	y	$\ln x^{-1}$	$\ln y$
1.000 000	2.72	0.000 000	1.000 632
0.500 000	3.84	-0.693 147	1.345 472
0.333 333	4.71	-1.098 612	1.549 688
0.250 000	5.44	-1.386 294	1.693 779
0.200 000	6.08	-1.609 438	1.805 005
0.166 667	6.66	-1.791 759	1.896 119
0.142 857	7.19	-1.945 910	1.972 691

図2 x と y 図3 x^{-1} と y 

解例 IV-6-3

 x と y における点弾力性 ($\dot{E}$)

$$\dot{E} = \frac{7 \times (15.1234302) - (8.525160) \times (11.263386)}{7 \times (13.196469) - (8.525160)^2} = 0.499974$$

 x^{-1} と y における点弾力性 ($\dot{E}$)

$$\dot{E} = \frac{7 \times (-15.1234302) - (-8.525160) \times (11.263386)}{7 \times (13.196469) - (-8.525160)^2} = -0.499974$$

6.3.4 逆数の変化率

2つの値 x_1, x_2 を考える。 x_1 から x_2 へ変化した時の変化率は

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} \quad (49)$$

である。次に x_1 の逆数が x_2 の逆数へ変化した時の変化率を求めると、

$$\frac{\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)}{\left(\frac{1}{x_1}\right)} = \frac{\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right)}{\left(\frac{1}{x_1}\right)} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} x_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_2} \quad (50)$$

である。 x_1 の逆数から x_2 の逆数へ変化した時の変化率は、 x_2 から x_1 へ変化した時の変化率に一致する。

6.3.5 逆数をとった変数による点弾力性の意味

- 従属変数 y との間に単調増加関数が仮定される独立変数 (x) の場合は逆数 (x^{-1}) をとり、その値を用いて点弾力性を求めればよい。
- 逆数を取った変数 (x^{-1}) の点弾力性は符号が逆転するが絶対値は等しい。
- 逆数による変化率は逆方向の変化率に一致する。
- 点弾力性の符号が負の場合は、 x の変化率と y の変化率の符号が異なることを意味し、正の場合は x の変化率と y の変化率の符号が等しいことを意味する。

6.4 冪乗モデルの多変数化

定義

$x_{ij} > 0$ を独立変数、 $y_i > 0$ を従属変数とし、 $\beta_0 > 0$ とする。多変数冪乗モデルを

$$y_i = \beta_0 x_{i1}^{\beta_1} x_{i2}^{\beta_2} \cdots x_{im}^{\beta_m} \quad (51)$$

と定義する。

問題 IV-6-4

次の関数を x_j で偏微分しなさい。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m) = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_j^{\beta_j} \dots x_m^{\beta_m}$$

解例 IV-6-4

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j} &= (\beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{j-1}^{\beta_{j-1}} x_j^{\beta_j} x_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots x_m^{\beta_m})_{x_j} \\ &= \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{j-1}^{\beta_{j-1}} x_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots x_m^{\beta_m} \left(x_j^{\beta_j} \right)_{x_j} \\ &= \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{j-1}^{\beta_{j-1}} x_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots x_m^{\beta_m} (\beta_j x_j^{\beta_j-1}) \\ &= \beta_j \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{j-1}^{\beta_{j-1}} x_j^{\beta_j-1} x_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots x_m^{\beta_m}\end{aligned}$$

定義

多変数冪乗モデル (51) における j 番目の独立変数に関する点弾力性を $\dot{E}_j$ とあらわし以下のように定義する。

$$\dot{E}_j = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{(\beta_0 x_1^{\beta_1} \dots (x_j + \Delta x_j)^{\beta_j} \dots x_m^{\beta_m}) - (\beta_0 x_1^{\beta_1} \dots x_j^{\beta_j} \dots x_m^{\beta_m})}{\beta_0 x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m}} \right)}{\left(\frac{\Delta x_j}{x_j} \right)} \quad (52)$$

(52) 右辺極限内を整理すると

$$\frac{x_j}{\beta_0 x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m}} \times \frac{(\beta_0 x_1^{\beta_1} \dots (x_j + \Delta x_j)^{\beta_j} \dots x_m^{\beta_m}) - (\beta_0 x_1^{\beta_1} \dots x_j^{\beta_j} \dots x_m^{\beta_m})}{\Delta x_j} \quad (53)$$

ここで $\Delta x_j \rightarrow 0$ とすると、(53) 式第 2 因数は x_j における (51) の偏導関数の定義式

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{(\beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots (x_j + \Delta x_j)^{\beta_j} \cdots x_m^{\beta_m}) - (\beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_j^{\beta_j} \cdots x_m^{\beta_m})}{\Delta x_j} \quad (54)$$

である。したがって、(52) は

$$\dot{E}_j = \frac{x_j}{\beta_0 x_{i1}^{\beta_1} x_{i2}^{\beta_2} \cdots x_{im}^{\beta_m}} \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad (55)$$

である。

ここで多変数冪乗モデル (51) の x_j に関する偏導関数を求めると

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \beta_j \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{j-1}^{\beta_{j-1}} x_j^{\beta_j-1} x_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots x_m^{\beta_m} \quad (56)$$

である。

(56) を (55) に代入すると点弾力性 ($\dot{E}_j$) は

$$\dot{E}_j = \frac{x_j}{\beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_m^{\beta_m}} \beta_j \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_{j-1}^{\beta_{j-1}} x_j^{\beta_j-1} x_{j+1}^{\beta_{j+1}} \dots x_m^{\beta_m} \quad (57)$$

$$= \beta_j \frac{\beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_j^{\beta_j} \dots x_m^{\beta_m}}{\beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_m^{\beta_m}} \quad (58)$$

$$= \beta_j \quad (59)$$

である。

多変数冪乗モデルは、 j 番目の変数 (x_j) の点弾力性 ($\dot{E}_j$) が β_j で得られるモデルである。点弾力性は単位に依存しないので独立変数間の従属変数 (y) への影響力を比較することが可能となる。

問題 IV-6-5

次の式を対数変換しなさい。ただし、 $\beta_0 > 0$, $x_{ij} > 0$, $y_i > 0$ とする。

$$y_i = \beta_0 x_{i1}^{\beta_1} x_{i2}^{\beta_2} \cdots x_{im}^{\beta_m}$$

解例 IV-6-5

$$\begin{aligned}\ln y_i &= \ln (\beta_0 x_{i1}^{\beta_1} x_{i2}^{\beta_2} \cdots x_{im}^{\beta_m}) \\ &= \ln \beta_0 + \ln x_{i1}^{\beta_1} + \ln x_{i2}^{\beta_2} + \cdots + \ln x_{im}^{\beta_m} \\ &= \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_{i1} + \beta_2 \ln x_{i2} + \cdots + \beta_m \ln x_{im}\end{aligned}$$

6.4.1 点弾力性 ($\dot{E}_j$) の推定値

多変数冪乗モデル (51) を対数変換すると

$$\ln y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_{i1} + \beta_2 \ln x_{i2} + \cdots + \beta_m \ln x_{im} \quad (60)$$

を得る。これは $\ln x_j$ を独立変数、 $\ln y$ を従属変数とする重回帰モデルである。このとき $\hat{\beta}_j$ はそれぞれ独立変数における点弾力性 ($\dot{E}_j$) であり、多変数冪乗モデルは対数変換を施すことにより点弾力性 ($\dot{E}_j$) を直接求めることができるモデルである。

点弾力性の符号が正の場合は、独立変数の変化率と従属変数の変化率の符号が等しいことを示し、負の場合は、独立変数の変化率と従属変数の変化率の符号が異なることを意味する。

問題 IV-6-6

表の値を使い以下の問いに答えなさい。
 x_j を独立変数とし、 y を従属変数とする。
点弾力性 E_j を求めなさい。

表 4 数値例 2

x_1	x_2	y
1.4	1.80	2.915 725
1.1	0.80	1.240 440
2.0	1.30	1.048 093
0.8	1.55	5.393 771
0.5	0.55	2.307 379
0.2	0.30	3.674 234
1.7	1.05	0.970 824

表 5 数値例 2 の対数変換値

$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln y$
0.336 472	0.587 787	1.070 119
0.095 310	-0.223 144	0.215 467
0.693 147	0.262 364	0.046 973
-0.223 144	0.438 255	1.685 245
-0.693 147	-0.597 837	0.836 112
-1.609 438	-1.203 973	1.301 345
0.530 628	0.048 790	-0.029 610

図4 数値例の位置

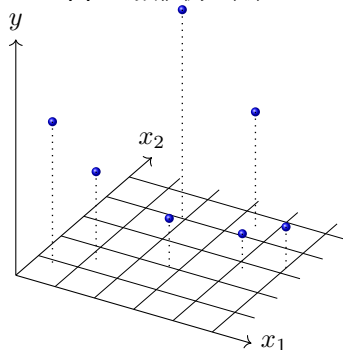
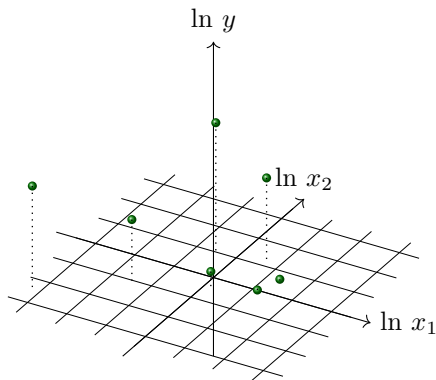


図5 対数変換後の位置



解例 IV-6-6

$\ln x_1, \ln x_2, \ln y$ をそれぞれ u_1, u_2, v , とあらわす。

$$\text{Cov}_{u_1 u_2} = 0.364724518$$

$$\text{Cov}_{u_1 v} = -0.287916464$$

$$\text{Cov}_{u_2 v} = -0.033239085$$

$$V_{u_1} = 0.556668799$$

$$V_{u_2} = 0.342565233$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= \hat{\beta}_1 \\ &= \frac{\text{Cov}_{u_1 v} V_{u_2} - \text{Cov}_{u_2 v} \text{Cov}_{u_1 u_2}}{V_{u_1} V_{u_2} - \text{Cov}_{u_1 u_2}^2} \\ &= -1.499999\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \hat{\beta}_2 \\ &= \frac{\text{Cov}_{u_2 v} V_{u_1} - \text{Cov}_{u_1 v} \text{Cov}_{u_1 u_2}}{V_{u_1} V_{u_2} - \text{Cov}_{u_1 u_2}^2} \\ &= 1.499999\end{aligned}$$

6.5 まとめ

- 仮定が変われば同じ理論であっても結論は変わる。
- 多変数冪乗モデルを仮定すると、点弾力性 ($\dot{E}_j$) は独立変数の変化率と従属変数の変化率の比例定数。
- 多変数冪乗モデルを仮定すると、独立変数間の影響力を点弾力性 ($\dot{E}_j$) で比較可能。
- 多変数冪乗モデルは対数変換により重回帰モデルに帰着。