

第Ⅳ部 冪乗モデル

5 点弾力性

ポイント

- 変化率
- 点弾力性

- 冪乗モデル

5.1 はじめに

- 顧客は、金銭, 時間, 活動, 忍耐を負担しています。
- 『プライス』は顧客に課される負担, 代償, 犠牲を意味します。
- 『プライス』が需要に与える影響を把握する指標が「需要の価格弾力性」です。

5.2 変化率

定義

変化前の値に対する変化量の比率を『変化率』と呼ぶ。

$$\text{変化率} = \frac{\text{変化量}}{\text{変化前の値}} = \frac{\text{変化後の値} - \text{変化前の値}}{\text{変化前の値}} \quad (1)$$

5.3 定数倍された値の変化率

定数倍する変数変換された値の変化率を考察する。ここでは、長さ並びに為替を例にする。

5.3.1 長さの変換

メートル法、ポンドヤード法などで測定された長さの変化率を考える。「インチ (in)」を「センチメートル (cm)」に変換するためには、インチで測った長さの値を 2.54 倍す

ればよい。

表 1 in から cm への変換

in	換算式	cm
60 in	60×2.54	152.40 cm
66 in	66×2.54	167.64 cm

ここで 60 in から 66 in へ変化した時の変化率を考える。

$$\frac{66 - 60}{60} = 0.1 \quad (2)$$

同様に、152.40 cm から 167.64 cm へ変化した時の変化率を求めると

$$\frac{167.64 - 152.40}{152.40} = \frac{15.24}{152.40} = 0.1 \quad (3)$$

であり、変化率は in で測定しても cm で測定しても変わらない。

5.3.2 通貨の変換

US\$ 日本円 による通貨の換算で同様な変化率を考える。

アメリカドル (US \$) から日本円 (JP ¥) に換算するためには、米ドル/円 の為替レートを掛けて計算している。

表 2 為替レートごとの換算額

US \$	¥115	¥128	¥135
\$ 12	¥1,380	¥1,536	¥1,620
\$ 15	¥1,725	¥1,920	¥2,025

それぞれの為替レートにおける変化率を考える。

US \$

$$\frac{15 - 12}{12} = \frac{3}{12} = 0.25 \quad (4)$$

US \$ 1 / ¥115

$$\frac{1725 - 1380}{1380} = \frac{345}{1380} = 0.25 \quad (5)$$

US \$ 1 / ¥128

$$\frac{1920 - 1536}{1536} = \frac{384}{1536} = 0.25 \quad (6)$$

US \$ 1 / ¥135

$$\frac{2025 - 1620}{1620} = \frac{405}{1620} = 0.25 \quad (7)$$

US \$ 1 / ¥ β ; $\beta \neq 0$

$$\frac{(15 \times \beta) - (12 \times \beta)}{12 \times \beta} = \frac{\beta(15 - 12)}{12\beta} = \frac{3}{12} = 0.25 \quad (8)$$

- 為替レートは相殺されるので、為替レートに関わらず変化率は一定である。
- $\beta \neq 0$ 倍する変数変換を施しても変化率は変らない。
- 通常為替レートは日によって異なる。変化前と変化後で異なる為替レートにより換算すれば変化率は当然異なる。

5.4 定数を加えられた値の変化率

定数を加える変数変換された値の変化率を考察する。温度の単位を例にする。ここで紹介する単位は摂氏度、華氏度、ケルビン、ランキン度である。本来は基礎となる単位 (K) の定義から紹介すべきであるが、温度の基本となる単位はあまりにも難解なのでここでは省略する。

5.4.1 摂氏度・セルシウス度 ($^{\circ}\text{C}$)

- 少し古い定義では、標準大気圧の下での水の氷点を 0°C 、沸点を 100°C とし、その間を 100 等分して 1°C としたもの。
- 現在の定義では、ケルビンであらわした熱力学温度の値から 273.15 を減じたもの。

5.4.2 ケルビン (K)

- 絶対零度を基準点とする温度。
- 温度間隔の定義は摂氏度 ($^{\circ}\text{C}$) と同一。
- ボルツマン定数を $1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ とすることによって定まる熱力学温度。
- ケルビンから摂氏度への変換は、 $C = K - 273.15$ で算出。

5.4.3 華氏度・ファーレンハイト度 (°F)

- 1708 年か 1709 年の冬の大変寒い日に、ダンツィヒ郊外の考案者ファーレンハイトの自宅において「0°F」を計測。
- 考案者ファーレンハイトの体温を「100°F」と固定し、目盛を 12 等分し、さらに 8 等分して 96°F の目盛を作成。
- その後微調整を繰り返し、標準大気圧の下での水の氷点と沸点をそれぞれ 32 °F、212°F とし、その間を 180 等分して 1°F と定義。
- 1°F の温度間隔がケルビン (K) の 5 分の 9 である。
- ケルビンから華氏度への変換は、
$$F = K \times \frac{9}{5} - 459.67$$
 で算出。

5.4.4 ランキン度 ($^{\circ}\text{R}$)

- 絶対零度を基準点とする温度。
- 温度間隔の定義は華氏度 ($^{\circ}\text{F}$) と同一。
- ランキン度から華氏度への変換は、 $F = R - 459.67$ で算出。
- ケルビンからランキン度への変換は、 $R = K \times \frac{9}{5}$ で算出。

表 3 4つの温度単位による換算値と観測値 1 から観測値 2 への変化率

	°C	°F	°R	K
測定値 1	25	77	536.67	298.15
測定値 2	30	86	545.67	303.15
温度差	5	9	9	5
変化率	0.2	0.116883117	0.016770082	0.016770082

- 同じ温度を測定した場合ケルビンとランキン度では変化率は変わらないが、摂氏度・華氏度ではそれぞれ値が異なる。
- 摂氏度・華氏度ではケルビンからの変換に定数項を用いているため、変化率を算出することが適切ではない。

5.5 非正值からの変化率

5.5.1 負値から正值への変化率

-1 から +1 への変化率を求めてみる。

$$\frac{1 - (-1)}{-1} = \frac{2}{-1} = -2 \quad (9)$$

-1 から +1 への変化量は正であるが変化率は負になる。

5.5.2 負値から負値への変化率

−1 から −2 への変化率を求めてみる。

$$\frac{-2 - (-1)}{-1} = \frac{-1}{-1} = +1 \quad (10)$$

−1 から −2 への変化量は負であるが変化率は正になる。

−2 から −1 への変化率を求めてみる。

$$\frac{-1 - (-2)}{-2} = \frac{+1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad (11)$$

−2 から −1 への変化量は正であるが変化率は負になる。

5.5.3 負値からの変化率の特徴

- 変化前の値が負値である場合、変化量の符号と変化率の符号が逆転する。
- 負値を取りうる値の変化率は算出すべきものかどうか検討が必要。
- 計算上は負値でも変化率は算出可能であるが、妥当かどうかは常に確認が必要。

5.6 0からの変化率

0からの変化率は定義に従うと

$$\frac{\text{変化後の値} - 0}{0} = \frac{\text{変化後の値}}{0} \quad (12)$$

であり、そもそも求めることができない。

5.7 変化率で許される変数変換

変数変換を施した値において以下の点を確認できる。

- 定数 ($\beta \neq 0$) 倍しても変化率は変化しない。
- 定数 (α) を加えると変化率は変化する。
- 負値からの変化率は符号が逆転する。
- 0 からの変化率は計算できない。

変化率算出に際して定数倍する変数変換は許容されるが、定数を加える変数変換は行うべきではない。

変化率を利用する場合は、理論的に正しかとらない値であるべきである。

5.8 需要の価格弾力性

定義

変数₁ の変化率に対する 変数₂ の変化率の比を E であらわし『変数₂ の 変数₁ 弾力性』という。

$$E = \frac{\text{変数}_2 \text{ の変化率}}{\text{変数}_1 \text{ の変化率}} \quad (13)$$

変数₁ が価格、変数₂ が需要であれば『需要の価格弾力性』という。

先験的な知識によれば需要関数は右下がりなので、 E は負の値となる。

問題 IV-5-1

価格が 10% 値下がりした時に需要量が 20% 増加したとする。この財における「需要の価格弾力性 (E)」を求めなさい。

問題 IV-5-2

価格が 20% 値上がりした時に需要量が 10% 減少したとする。この財における「需要の価格弾力性 (E)」を求めなさい。

問題 IV-5-3

$E = -2.0$ とする。価格が 50% 値下がりした時、つまり価格が半額になった時の需要量の変化率を求めなさい。

問題 IV-5-4

$E = -0.5$ とする。価格が 100% 値上がりした時、つまり価格が倍になった時の需要量の変化率を求めなさい。

解例 IV-5 - 1

$$E = \frac{20\%}{-10\%} = -2.0$$

解例 IV-5 - 2

$$E = \frac{-10\%}{20\%} = -0.5$$

解例 IV-5 - 3

$$-2.0 \times (-50\%) = 100\%$$

解例 IV-5 - 4

$$-0.5 \times (100\%) = -50\%$$

5.9 需要の価格弾力性の数式としての意味

5.9.1 表記法

- P を価格、 D を需要とし、その観測値を (P_i, D_i) とあらわす。
- 観測点 A を (P_a, D_a) , 観測点 B を (P_b, D_b) とする。
- A から B へ変化した時の「需要の価格弾力性」を $E_{A \rightarrow B}$ とあらわす。

5.9.2 A から B への変化

A から B へ変化した時のそれぞれの変化率は、

$$\text{価格の変化率} = \frac{P_b - P_a}{P_a} \quad (14)$$

$$\text{需要の変化率} = \frac{D_b - D_a}{D_a} \quad (15)$$

なので、A から B へ変化した時の「需要の価格弾力性」は、

$$E_{A \rightarrow B} = \frac{\left(\frac{D_b - D_a}{D_a} \right)}{\left(\frac{P_b - P_a}{P_a} \right)} \quad (16)$$

$$= \frac{D_b - D_a}{D_a} \frac{P_a}{P_b - P_a} \quad (17)$$

$$= \frac{D_b - D_a}{P_b - P_a} \frac{P_a}{D_a} \quad (18)$$

である。

5.9.3 価格と需要に関する仮定

通常、経済学では価格 (P) と需要 (D) を図示するとき、縦軸に 価格 (P)、横軸に 需要 (D) を用いる。一方、マーケティングでは、価格 (P) はマーケティングミックスの一部であり、価格 (P) は需要 (D) へ影響を与える変数であると考えている。このことを数学的に表現するならばマーケティングでは需要 (D) は価格 (P) の関数

$$D = f(P) \quad (19)$$

であると仮定している。また数学では独立変数を横軸、従属変数を縦軸とするのが一般的なのでこれにならい、独立変数である価格 (P) を横軸にとり、従属変数である需要 (D) を縦軸に取って表現する。

5.9.4 点 AB を通る直線

ここで点 $A, (P_a, D_a), B(P_b, D_b)$ を通る直線を求める。2 点を通る直線は連立方程式

$$\begin{cases} D_a = \alpha + \beta P_a \\ D_b = \alpha + \beta P_b \end{cases} \quad (20)$$

の解として求めることができる。(20) を解き

$$\beta = \frac{D_b - D_a}{P_b - P_a} \quad (21)$$

を得る。

5.9.5 需要の価格弾力性と直線の関係

(18) 式第一因数は A, B を通る直線の傾き β であり、この β をつかうと $E_{A \rightarrow B}$ は、

$$E_{A \rightarrow B} = \beta \frac{P_a}{D_a} \quad (22)$$

とあらわすことができる。このことを言葉にすると、「 $E_{A \rightarrow B}$ は点 A, B が与えられたとき、点 A, B を通る直線の傾き β と、変化前の値である点 A における価格 (P_a) と 需要 (D_a) の比の積」である。

問題 IV-5-5

観測点を $A(2, 8)$, $B_1(8, 5)$ とする。 $E_{A \rightarrow B_1}$ と $E_{B_1 \rightarrow A}$ を求めなさい。

問題 IV-5-6

観測点を $A(2, 8)$, $B_2(6, 6)$ とする。 $E_{A \rightarrow B_2}$ と $E_{B_2 \rightarrow A}$ を求めなさい。

問題 IV-5-7

観測点を $A(2, 8)$, $B_3(4, 7)$ とする。 $E_{A \rightarrow B_3}$ と $E_{B_3 \rightarrow A}$ を求めなさい。

解例 IV-5-5

$$E_{A \rightarrow B_1} = \frac{5-8}{8-2} \frac{2}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$E_{B_1 \rightarrow A} = \frac{8-5}{2-8} \frac{8}{5} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{8}{5} = -\frac{4}{5}$$

解例 IV-5-6

$$E_{A \rightarrow B_2} = \frac{6-8}{6-2} \frac{2}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$E_{B_2 \rightarrow A} = \frac{8-6}{2-6} \frac{6}{6} = \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

解例 IV-5-7

$$E_{A \rightarrow B_3} = \frac{7-8}{4-2} \frac{2}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$E_{B_3 \rightarrow A} = \frac{8-7}{2-4} \frac{4}{7} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{4}{7} = -\frac{2}{7}$$

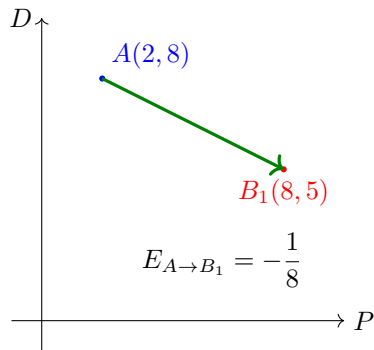
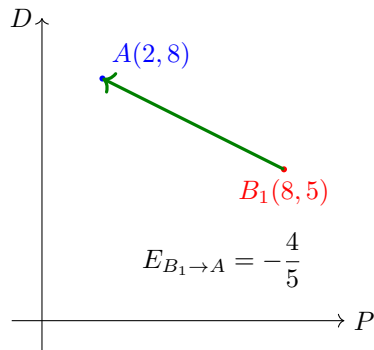
図1 $A(2, 8)$ から $B_1(8, 5)$ への変化図2 $B_1(8, 5)$ から $A(2, 8)$ への変化

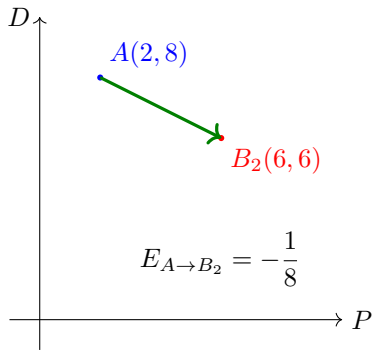
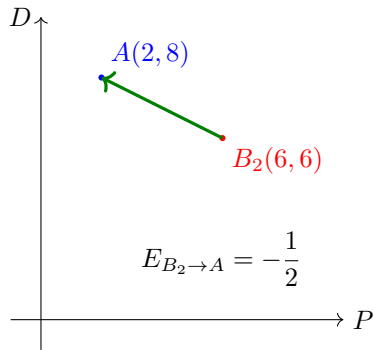
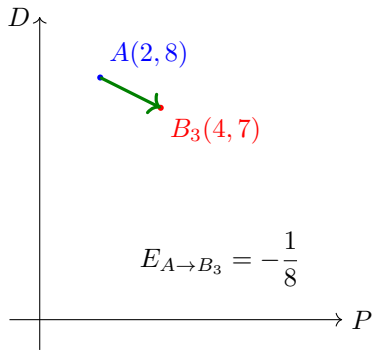
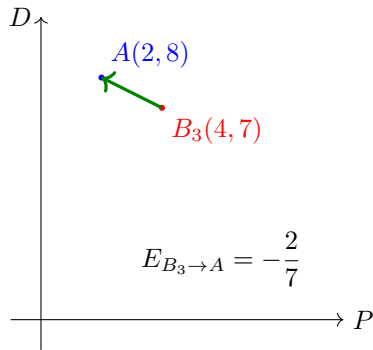
図3 $A(2, 8)$ から $B_2(6, 6)$ への変化図4 $B_2(6, 6)$ から $A(2, 8)$ への変化

図5 $A(2, 8)$ から $B_3(4, 7)$ への変化図6 $B_3(4, 7)$ から $A(2, 8)$ への変化

5.9.6 B から A への変化

B から A へ変化したときのそれぞれの変化率は、

$$\text{価格の変化率} = \frac{P_a - P_b}{P_b} \quad (23)$$

$$\text{需要の変化率} = \frac{D_a - D_b}{D_b} \quad (24)$$

なので、B から A へ変化した時の需要の価格弾力性は、

$$E_{B \rightarrow A} = \frac{\left(\frac{D_a - D_b}{D_b} \right)}{\left(\frac{P_a - P_b}{P_b} \right)} \quad (25)$$

$$= \frac{D_a - D_b}{P_a - P_b} \frac{P_b}{D_b} \quad (26)$$

$$= \frac{-(D_b - D_a)}{-(P_b - P_a)} \frac{P_b}{D_b} \quad (27)$$

$$= \frac{D_b - D_a}{P_b - P_a} \frac{P_b}{D_b} \quad (28)$$

である。

5.9.7 $E_{A \rightarrow B}$ と $E_{B \rightarrow A}$ の比較

(18)(28) によると

$$E_{A \rightarrow B} = \frac{D_b - D_a}{P_b - P_a} \frac{P_a}{D_a} = \beta \frac{P_a}{D_a} \quad (29)$$

$$E_{B \rightarrow A} = \frac{D_b - D_a}{P_b - P_a} \frac{P_b}{D_b} = \beta \frac{P_b}{D_b} \quad (30)$$

両式は右辺第 2 因数において異なる。

普通の財において、 P_i と D_i には負の相関関係が想定されており、 $\beta < 0$ であって、 $P_i > 0$, $D_i > 0$ なので

$$\frac{P_a}{D_a} \neq \frac{P_b}{D_b} \quad (31)$$

である。

5.9.8 3点以上の観測点の $E_{A \rightarrow B}$

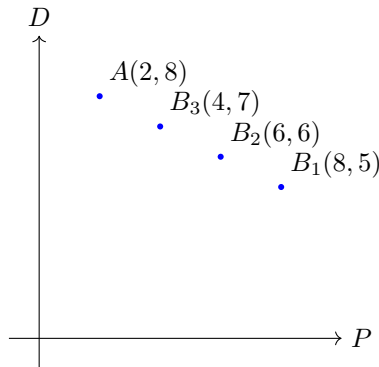
- 観測点が3点以上の場合を考える。
- 組合せにより $E_{A \rightarrow B}$ は異なってしまう。
- 一つの財に対して異なるいくつかの $E_{A \rightarrow B}$ が求まる。
- 代表する値を決めるための議論が必要となる。

5.9.9 観測点が4点の場合

観測点が4点の場合、12通り算出できる。

$$\begin{array}{ll}
 E_{A \rightarrow B_1} = -\frac{1}{8} & E_{B_2 \rightarrow A} = -\frac{1}{2} \\
 E_{A \rightarrow B_2} = -\frac{1}{8} & E_{B_2 \rightarrow B_1} = -\frac{1}{2} \\
 E_{A \rightarrow B_3} = -\frac{1}{8} & E_{B_2 \rightarrow B_3} = -\frac{1}{2} \\
 E_{B_1 \rightarrow A} = -\frac{4}{5} & E_{B_3 \rightarrow A} = -\frac{2}{7} \\
 E_{B_1 \rightarrow B_2} = -\frac{4}{5} & E_{B_3 \rightarrow B_1} = -\frac{2}{7} \\
 E_{B_1 \rightarrow B_3} = -\frac{4}{5} & E_{B_3 \rightarrow B_2} = -\frac{2}{7}
 \end{array}$$

図7 観測点が4点の場合



5.10 点弾力性

y を需要、 x を価格とする。 y は x の関数 $f(x)$ であり、微分可能とする。 $x = x_i$ の時の y の値は、

$$y_i = f(x_i) \quad (32)$$

である。

x が x_i から Δx 変化した時の y の値は、

$$f(x_i + \Delta x) \quad (33)$$

であり、 x が x_i から Δx 変化したことによってもたらされる y の変化量を Δy とすると、

$$\Delta y = f(x_i + \Delta x) - f(x_i) \quad (34)$$

である。

したがって x の変化によって引き起こされる y の変化率は、

$$\frac{\Delta y}{y_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{f(x_i)} \quad (35)$$

である。

一方 x が x_i から Δx 変化した時の変化率は、

$$\frac{\Delta x}{x_i} \quad (36)$$

である。

すると需要の価格弾力性 (E) は、

$$E = \frac{\left(\frac{\Delta y}{y_i}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x_i}\right)} = \frac{\left(\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{f(x_i)}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x_i}\right)} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{f(x_i)} \frac{x_i}{\Delta x} \quad (37)$$

$$= \frac{x_i}{f(x_i)} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (38)$$

(38) において $f(x)$ は微分可能なので $\Delta x \rightarrow 0$ とすると、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_i}{f(x_i)} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{x_i}{f(x_i)} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} \quad (39)$$

である。

x_i が変れば (39) もかわる。つまり、(39) は x の関数である。そこで x_i を x に置き換えた式を $\dot{E}$ であらわし点弾力性とよぶ。

定義

(x, y) が $y = f(x)$ の関係にあるとき、 x の変化率に対する y の変化率の比の極限を $\dot{E}$ であらわし『点弾力性』とよぶ。ただし $f(x)$ は微分可能とする。

$$\dot{E} = \frac{x}{f(x)} \frac{dy}{dx} \quad (40)$$

5.11 冪乗モデル

5.11.1 需要と価格に関する仮定

- 価格が上昇すると需要が減り、価格が下落すると需要が増える財を『普通の財』とよぶ。
- 『普通の財』では需要と価格に負の相関関係を想定している。
- そこで『普通の財』の需要関数を狭義単調減少関数として定式化する。

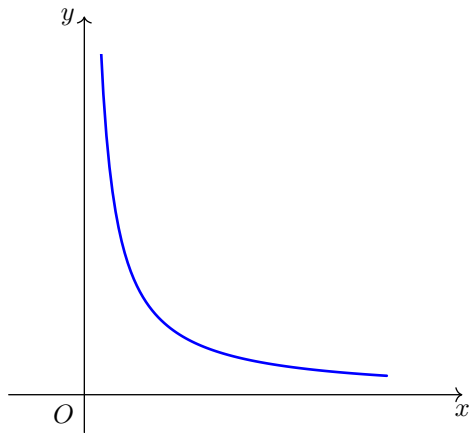
定義

x を価格、 y を需要、 $\alpha > 0$, $\beta < 0$, 定義域を $(0, +\infty)$, 値域を $(0, +\infty)$ とし、需要と価格の関係が以下の関数であると仮定する。

$$y = \alpha x^{\beta} \quad (41)$$

このモデルを『冪乗モデル』とよぶ。

図 8 冪乗モデルのグラフ



問題 IV-5-8

以下の関数を x で微分しなさい。ただし、 $x > 0$ とする。

$$y = \alpha x^{\beta}$$

解例 IV-5 - 8

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\alpha x^\beta)' \\ &= \alpha (x^\beta)' \\ &= \alpha \beta x^{\beta-1}\end{aligned}$$

5.11.2 冪乗モデルを仮定した点弾力性 ($\dot{E}$)

(39) 式に (41) 式を代入すると

$$\dot{E} = \frac{x}{\alpha x^\beta} (\alpha x^\beta)' \quad (42)$$

$$= \frac{x}{\alpha x^\beta} \alpha \beta x^{\beta-1} \quad (43)$$

$$= \frac{x \alpha \beta x^{\beta-1}}{\alpha x^\beta} \quad (44)$$

$$= \frac{\cancel{\alpha} \beta \cancel{x}^\beta}{\cancel{\alpha} \cancel{x}^\beta} = \beta \quad (45)$$

冪乗モデルにおける点弾力性は関数の全域にわたり一定である。冪乗モデルにおける点弾力性 ($\dot{E}$) は β で与えられる。

問題 IV-5-9

次の関数を対数変換しなさい。ただし、 $\alpha, x, y > 0$ とする。

$$y = \alpha x^{\beta}$$

解例 IV-5 - 9

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \alpha x^{\beta} \\ &= \ln \alpha + \ln x^{\beta} \\ &= \ln \alpha + \beta \ln x\end{aligned}$$

5.11.3 冪乗モデルと線型モデルの関係

冪乗モデル

$$y = \alpha x^{\beta} \quad (41)$$

を対数変換した式

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x \quad (46)$$

は、 $\ln x$ を独立変数、 $\ln y$ を従属変数とする線型モデルである。このとき β は点弾力性 ($\dot{E}$) であり、冪乗モデルは対数変換を施すことにより点弾力性 ($\dot{E}$) を直接求めることができるモデルである。

問題 IV-5-10

x を価格とし、 y_j をそれぞれの需要とする。

表 4 の値を使い以下の値を求めなさい。

- (1) x と y_1 における点弾力性
- (2) x と y_2 における点弾力性
- (3) x と y_3 における点弾力性

表 4 数値例

x	y_1	y_2	y_3
0.35	3.38	5.71	16.33
0.65	2.48	3.08	4.73
0.95	2.05	2.11	2.22
1.25	1.79	1.60	1.28
1.55	1.61	1.29	0.83
1.85	1.47	1.08	0.58
2.15	1.36	0.93	0.43

表 5 $\ln x$ と $\ln y_1$ による線型モデル用の計算

x	y_1	$\ln x$	$\ln y_1$	$(\ln x)^2$	$\ln x \times \ln y_1$
0.35	3.38	-1.05	1.22	1.1025	-1.2810
0.65	2.48	-0.43	0.91	0.1849	-0.3913
0.95	2.05	-0.05	0.72	0.0025	-0.0360
1.25	1.79	0.22	0.58	0.0484	0.1276
1.55	1.61	0.44	0.48	0.1936	0.2112
1.85	1.47	0.62	0.39	0.3844	0.2418
2.15	1.36	0.77	0.31	0.5929	0.2387
		0.52	4.61	2.5092	-0.8890

表 6 $\ln x$ と $\ln y_2$ による線型モデル用の計算

x	y_2	$\ln x$	$\ln y_2$	$(\ln x)^2$	$\ln x \times \ln y_2$
0.35	5.71	-1.05	1.74	1.1025	-1.8270
0.65	3.08	-0.43	1.12	0.1849	-0.4816
0.95	2.11	-0.05	0.75	0.0025	-0.0375
1.25	1.60	0.22	0.47	0.0484	0.1034
1.55	1.29	0.44	0.25	0.1936	0.1100
1.85	1.08	0.62	0.08	0.3844	0.0496
2.15	0.93	0.77	-0.07	0.5929	-0.0539
		0.52	4.34	2.5092	-2.1370

表7 $\ln x$ と $\ln y_3$ による線型モデル用の計算

x	y_3	$\ln x$	$\ln y_3$	$(\ln x)^2$	$\ln x \times \ln y_3$
0.35	16.33	-1.05	2.79	1.1025	-2.9295
0.65	4.73	-0.43	1.55	0.1849	-0.6665
0.95	2.22	-0.05	0.80	0.0025	-0.0400
1.25	1.28	0.22	0.25	0.0484	0.0550
1.55	0.83	0.44	-0.19	0.1936	-0.0836
1.85	0.58	0.62	-0.54	0.3844	-0.3348
2.15	0.43	0.77	-0.84	0.5929	-0.6468
		0.52	3.82	2.5092	-4.6462

解例 IV-5 - 10 - (1)

$$\dot{E} = \hat{\beta} = \frac{7 \times (-0.8890) - (0.52)(4.61)}{7 \times (2.5092) - (0.52)^2} = -0.4984$$

解例 IV-5 - 10 - (2)

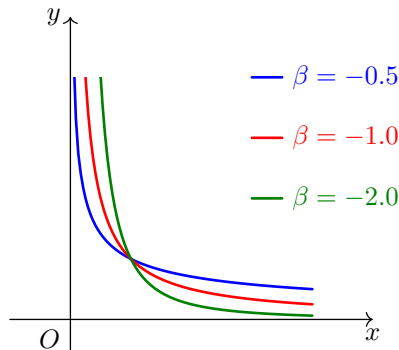
$$\dot{E} = \hat{\beta} = \frac{7 \times (-2.1370) - (0.52)(4.34)}{7 \times (2.5092) - (0.52)^2} = -0.9954$$

解例 IV-5 - 10 - (3)

$$\dot{E} = \hat{\beta} = \frac{7 \times (-4.6462) - (0.52)(3.82)}{7 \times (2.5092) - (0.52)^2} = -1.9954$$

5.11.4 点弾力性における β の違い

- $\dot{E} < -1.0$ のとき『弾力的』という。
- $-1 < \dot{E} < 0.0$ のとき『非弾力的』という。
- $\dot{E} = -1.0$ のとき『単位弾力的』という。

図9 $y = x^\beta$ のグラフ

5.11.5 点弾力性と全顧客の支払額の総計

ここで冪乗モデルを仮定した場合の全顧客の支払額の総計 (S) を考える。支払額の総計 (S) は価格 (x) と需要 (y) の積なので、

$$S = xy = x\alpha x^{\beta} = \alpha x^{\beta+1} \quad (47)$$

である。

$\dot{E}$ が弾力的であれば、

$$\beta < -1 \quad (48)$$

$$\beta + 1 < 0 \quad (49)$$

である。したがって (47) 最右辺の冪数は負である。冪乗モデルの仮定により、 x, α は正なので支払額の総計 (S) は単調減少関数である。

$\dot{E}$ が非弾力的であれば、

$$-1 < \beta < 0 \quad (50)$$

$$0 < \beta + 1 < 1 \quad (51)$$

であり、(47) 最右辺の冪数は正なので支払額の総計 (S) は単調増加関数である。

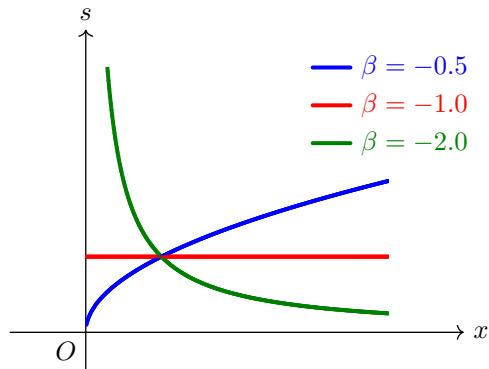
$\dot{E}$ が単位弾力的であれば、

$$\beta = -1 \quad (52)$$

$$\beta + 1 = 0 \quad (53)$$

であり (47) 最右辺の冪数は 0 なので、 x に関わらず支払額の総計 (S) は一定である。

図 10 $S = x^{\beta+1}$ のグラフ



5.11.6 冪乗モデルを仮定した点弾力性 ($\dot{E}$) の好ましい点

- 点弾力性 ($\dot{E}$) を定数として測定可能。
- 「価格の変化率」と「需要の変化率」の間の比例定数である。
- 変化率と変化率の比をとるため、単位に依存しない。
- 対象ごとに一つの値 ($\dot{E} = \beta$) を持つため、『オフアリングス』, 地域, 期間, 市場の比較が可能となる。
- 非弾力的 ($-1.0 < \dot{E} < 0.0$) , 単位弾力的 ($\dot{E} = -1.0$) , 弾力的 ($\dot{E} < -1.0$) の解釈が容易。

5.11.7 『プライス』に含まれる項目への適用

- マーケティングミックスにおいて、『プライス』は『オファリングス』を得るために課される代償, 負担, 犠牲としての意味を持つ。
- マーケティングミックスの分類項目としての『プライス』には、金銭以外に時間, 活動, 忍耐といったものを含む。
- これら項目に対し、『オファリングス』の需要との間に単調減少関数を仮定し、冪乗モデルを適用することに問題はない。

5.12 まとめ

- 変化前の値 (x_i) と変化量 (Δx) の比が変化率 $\left(\frac{\Delta x}{x_i}\right)$ である。
- $y = f(x)$ を微分可能とする。 x の変化率と y の変化率の比において、 x_i の変化量 (Δx) を 0 に近づけた時の極限が点弾力性 ($\dot{E}$) である。

$$\dot{E} = \frac{x}{f(x)} \frac{dy}{dx}$$

- $f(x)$ に冪乗モデル $y = \alpha x^\beta$ を仮定すると点弾力性は $\dot{E} = \beta$ で一定となる。
- $f(x)$ に冪乗モデル $y = \alpha x^\beta$ を対数変換すると線型モデルに帰着する。

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x$$