

第 IV 部 冪乗モデル

4 合成関数の微分

ポイント

- 合成関数の微分
- x^α の導関数

- 対数微分法

4.1 はじめに

- 最初の変化は次の変化を生みだします。
- 最初と最後だけでは何が起こっているかは分かりません。
- でも、順を追って確認すると理解することが出来ます。

4.2 微分

$y = f(x)$ の導関数を $\frac{dy}{dx}$ であらわし、以下のように定義する。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

$f(x)$ から導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める演算を『微分』といい、 $f(x)$ から $\frac{dy}{dx}$ を求めることを『 $f(x)$ を微分する』という。

導関数は常に求められるわけではない。導関数を求められることを『微分可能』という。

4.2.1 微分の公式

これまで確認された微分の公式を列挙する。 $f(x)$, $g(x)$ は微分可能とする。

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (2)$$

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \quad ; \alpha \text{ は定数} \quad (3)$$

$$(\exp(x))' = \exp(x) \quad (4)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad ; x > 0 \quad (5)$$

$$(x^2)' = 2x \quad (6)$$

$$(x)' = 1 \quad (7)$$

$$(c)' = 0 \quad ; c \text{ は定数} \quad (8)$$

4.2.2 偏微分

多変数関数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m)$ において、 $\Delta x_j \neq 0$ を x_j の変化量とする。 Δx_j と Δx_j によってもたらされる y の変化量の比において Δx_j を 0 になることなく限りなく 0 に近づけたとき関数を求められたならば、その関数を $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ であらわし『 x_j の偏導関数』とよぶ。

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m)}{\Delta x_j} \quad (9)$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m)$ から (9) を求めることを『 x_j で偏微分する』という。偏導関数は変数の数 m だけある。具体的な関数を偏微分する場合、 $(f(x_1, x_2, \dots, x_m))_{x_j}$ とあらわす。

∂ はラウンドとよむ。

4.3 合成関数の微分

合成関数とは

$$z = f(y) \tag{10}$$

$$y = g(x) \tag{11}$$

を合成して得られる関数

$$z = f(g(x)) \tag{12}$$

をいう。

定理 IV-4-1 (合成関数の微分)

$y = g(x)$ が区間 (a, b) で微分可能であるとする。更に $z = f(y)$ が $y = g(x)$ の値域を含む区間において微分可能であれば、合成関数 $z = f(g(x))$ は区間 (a, b) で微分可能であって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (13)$$

が成立する。

(13) は

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \quad (14)$$

ともあらわす。

証明

変数 x が Δx 変化した時の $y = g(x)$ の変化量 Δy は

$$\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x) \quad (15)$$

であり、 y が Δy 変化した時の $z = f(y)$ の変化量 Δz は

$$\Delta z = f(y + \Delta y) - f(y) \quad (16)$$

である。 $g(x)$ を微分したものを $\frac{dy}{dx}$ とする。 $g(x)$ は微分可能なので、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすれば

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx} \quad (17)$$

そこで極限を取る前の式を

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon_1 \quad (18)$$

とする。(18)において $\Delta x \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx} \quad (19)$$

なので

$$\varepsilon_1 \rightarrow 0 \quad (20)$$

ここで (18) 式の最左辺と最右辺を残し

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon_1 \quad (21)$$

両辺に Δx を掛けると

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + \varepsilon_1 \right) \Delta x \quad (22)$$

ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすると $\Delta y \rightarrow 0$ である。同様に $f(y)$ を微分したものを $\frac{dz}{dy}$ とする。 $f(y)$ も微分可能なので極限を取る前の式は

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} + \varepsilon_2 \quad (23)$$

ここで $\Delta y \rightarrow 0$ とすると $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ である。(23) の最左辺と最右辺を抜き出し

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} + \varepsilon_2 \quad (24)$$

両辺に Δy を掛けると

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dy} + \varepsilon_2 \right) \Delta y \quad (25)$$

(22) を (25) に代入すると

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dy} + \varepsilon_2 \right) \left(\frac{dy}{dx} + \varepsilon_1 \right) \Delta x \quad (26)$$

両辺を Δx で割ると

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \left(\frac{dz}{dy} + \varepsilon_2 \right) \left(\frac{dy}{dx} + \varepsilon_1 \right) \quad (27)$$

ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすると $\Delta y \rightarrow 0$ であり、このとき、 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ であって、 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ なので (27) 式左辺は

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \rightarrow \frac{dz}{dx} \quad (28)$$

(27) 式右辺の因数はそれぞれ

$$\left(\frac{dz}{dy} + \varepsilon_2 \right) \rightarrow \left(\frac{dz}{dy} \right) \quad (29)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} + \varepsilon_1 \right) \rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (30)$$

である。したがって (13) が成立する。(終)

例題 IV-4-1

以下の関数を x で微分しなさい。ただし、 $\alpha \neq 0$ とする。

$$z = \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x) \quad (31)$$

解法 IV-4-1

$$y = \alpha x \quad (32)$$

とおくと

$$z = \frac{1}{\alpha} \exp(y) \quad (33)$$

それぞれを微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \quad (34)$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\alpha} \exp(y) \quad (35)$$

合成関数の微分の定理より

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (36)$$

$$= \alpha \frac{1}{\alpha} \exp(y) \quad (37)$$

$$= \exp(y) \quad (38)$$

$$= \exp(\alpha x) \quad (39)$$

問題 IV-4-1

次の関数を x で微分しなさい。ただし、 α は定数とする。

$$y = \exp(\alpha + x)$$

解例 IV-4-1

天下りの的に

$$u = \alpha + x$$

と置くと、

$$y = \exp(u)$$

である。それぞれ微分すると、

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{du} = \exp(u)$$

合成関数の定理より、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \\ &= (1) \exp(u) \\ &= \exp(\alpha + x)\end{aligned}$$

問題 IV-4-2

以下の関数を x で微分しなさい。

$$z = -\exp(-x)$$

解例 IV-4-2

天下りの的に

$$y = -x$$

とおくと

$$z = -\exp(y)$$

である。それぞれを微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{dz}{dy} = -\exp(y)$$

合成関数の微分の定理より

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = (-1)(-\exp(y))$$

$y = -x$ で置き換え

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= (-1)(-\exp(-x)) \\ &= \exp(-x)\end{aligned}$$

問題 IV-4-3

以下の関数を x で微分しなさい。

$$z = \exp(-\exp(-x))$$

解例 IV-4-3

天下りの的に

$$y = -\exp(-x)$$

とおくと

$$z = \exp(y)$$

それぞれ微分すると

$$\frac{dz}{dy} = \exp(y)$$

問題 IV-4-2 より

$$\frac{dy}{dx} = \exp(-x)$$

合成関数の微分の定理より

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \exp(-x) \exp(y) \\ &= \exp(-x) \exp(-\exp(-x))\end{aligned}$$

例題 IV-4-2

以下の式を偏微分しなさい。

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \quad (40)$$

解法 IV-4-2

和の導関数は導関数の和なので i ごとの導関数を求めてから足し合わせることを考える。

$$u_i = y_i - \alpha - \beta x_i \quad (41)$$

$$v_i = u_i^2 \quad (42)$$

と置く。それぞれを偏微分し

$$\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} = -1 \quad (43)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \beta} = -x_i \quad (44)$$

$$\frac{dv_i}{du_i} = 2u_i \quad (45)$$

を得る。

合成関数の微分の定理より

$$\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = \frac{dv_i}{du_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} = (-1)(2u_i) = -2(y_i - \alpha - \beta x_i) \quad (46)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \beta} = \frac{dv_i}{du_i} \frac{\partial u_i}{\partial \beta} = (-x_i)(2u_i) = -2x_i(y_i - \alpha - \beta x_i) \quad (47)$$

を得る。両式の i に関する総和が求める $f(\alpha, \beta)$ の偏導関数なので、 i に関して総和をとり、

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n (-2(y_i - \alpha - \beta x_i)) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i) \quad (48)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n (-2x_i(y_i - \alpha - \beta x_i)) = -2 \sum_{i=1}^n x_i(y_i - \alpha - \beta x_i) \quad (49)$$

問題 IV-4-4

以下の式を $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ で偏微分しなさい。

$$f(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2$$

解例 IV-4-4

天下りの的に

$$u_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2}$$

$$v_i = u_i^2$$

と置く。

それぞれを偏微分し

$$\frac{\partial u_i}{\partial \beta_0} = -1$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \beta_1} = -x_{i1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \beta_2} = -x_{i2}$$

$$\frac{dv_i}{du_i} = 2u_i$$

を得る。

合成関数の定理より、 i ごとの偏導関数は

$$\frac{\partial v_i}{\partial \beta_0} = \frac{dv_i}{du_i} \frac{\partial u_i}{\partial \beta_0} = (2u_i)(-1) = -2(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \beta_1} = \frac{dv_i}{du_i} \frac{\partial u_i}{\partial \beta_1} = (2u_i)(-x_{i1}) = -2x_{i1}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \beta_2} = \frac{dv_i}{du_i} \frac{\partial u_i}{\partial \beta_2} = (2u_i)(-x_{i2}) = -2x_{i2}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})$$

である。これらを i に関して総和をとった値が求める偏導関数である。

したがって求める偏導関数は、

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_{i1} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_{i2} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})$$

である。

定理 IV-4-2(連鎖公式)

$z = f(y)$, $y = g(x)$, $x = h(w)$ がそれぞれ微分可能であれば、合成関数

$$z = f(g(h(w))) \quad (50)$$

について

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dw} \quad (51)$$

が成立する。この定理は連鎖がもっと長い場合でも同様に成り立つ。

証明

$z = f(y)$, $y = g(x)$ による合成関数 $f(g(x))$ は x の関数であって、 x による導関数は

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (52)$$

である。そして、関数 $f(g(x))$ と $x = h(w)$ の合成関数は

$$z = f(g(h(w))) \quad (53)$$

であって、その導関数は、

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dw} \quad (54)$$

(52) を代入すると

$$= \left(\frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{dw} \quad (55)$$

なので (51) が成り立つ。連鎖がもっと長い場合でも同様に成り立つことは明らかであろう。(終)

4.4 対数微分法

定理 IV-4-3 (対数微分法)

$f(x)$ が微分可能のとき $f(x) \neq 0$ である点 x で次の関係式が成立する。

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (56)$$

ここで $|f(x)|$ は、 $f(x)$ の絶対値である。

証明

$f(x) > 0$ の場合を考える。

$$z = \ln y \quad (57)$$

$$y = f(x) \quad (58)$$

の合成関数

$$z = \ln f(x) \quad (59)$$

に合成関数の微分を適用する。

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} \quad (60)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (61)$$

なので、合成関数の微分の定理より

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} f'(x) \quad (62)$$

$$= \frac{f'(x)}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (63)$$

が成立する。

$f(x) < 0$ の場合は、 $-f(x) > 0$ であるから、今の結果を利用し

$$(\ln(-f(x)))' = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (64)$$

である。これらをあわせて、

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) > 0 \text{ のとき} \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (65)$$

であるから (56) が成立する。(終)

定理 IV-4-3.1

 $x \neq 0$ において以下の式が成立する。

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (66)$$

証明

 $f(x) = x$ に対して定理 IV-4-3 対数微分法を適用する。

$$f'(x) = 1 \quad (67)$$

であるから

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (68)$$

(終)

定理 IV-4-3.2

α を任意の実数としたとき、 $x > 0$ に対して

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (69)$$

が成立する。

証明

$\ln x^\alpha$ を考える。

$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x \quad (70)$$

であるから、この式の両辺を x で微分する。

$$f(x) = x^\alpha \quad (71)$$

とすると、左辺の微分は定理 IV-4-3 対数微分法により

$$(\ln x^\alpha)' = \frac{(x^\alpha)'}{x^\alpha} \quad (72)$$

右辺の微分は、『定数倍された導関数は、導関数の定数倍』なので、

$$(\alpha \ln x)' = \alpha (\ln x)' \quad (73)$$

さらに定理 IV-4-3.1 により

$$= \alpha \frac{1}{x} = \frac{\alpha}{x} \quad (74)$$

(72) 右辺と (74) 最右辺を両辺に並べると

$$\frac{(x^\alpha)'}{x^\alpha} = \frac{\alpha}{x} \quad (75)$$

両辺に x^α をかけて

$$(x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x} x^\alpha \quad (76)$$

右辺を約分して、

$$= \alpha x^{\alpha-1} \quad (77)$$

(終)

問題 IV-4-5

次の関数を微分しなさい。ただし $x > 0$, α は定数とする。

$$y = \ln x^\alpha$$

解例 IV-4-5

天下りの的に

$$u = x^\alpha$$

とおくと、

$$y = \ln u$$

である。それぞれ微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= \alpha x^{\alpha-1} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{u}\end{aligned}$$

合成関数の定理より、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \\ &= (\alpha x^{\alpha-1}) \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= (\alpha x^{\alpha-1}) \left(\frac{1}{x^\alpha} \right) \\ &= \frac{\alpha}{x}\end{aligned}$$

問題 IV-4-6

以下の式を微分しなさい。ただし $x > 0$ とする。

$$f(x) = \alpha x^{\beta}$$

解例 IV-4 - 6

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\alpha x^\beta)' \\&= \alpha (x^\beta)' \\&= \alpha \beta x^{\beta-1}\end{aligned}$$

問題 IV-4-7

以下の式を偏微分しなさい。ただし $x_j > 0$ とする。

$$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3}$$

解例 IV-4-7

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \left(\alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \right)_{x_1} \\ &= \alpha x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \left(x_1^{\beta_1} \right)_{x_1} \\ &= \alpha x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \beta_1 x_1^{\beta_1-1} \\ &= \alpha \beta_1 x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \alpha \beta_2 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2-1} x_3^{\beta_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= \alpha \beta_3 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3-1}\end{aligned}$$

問題 IV-4-8

以下の関数を偏微分しなさい。

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha + \beta x))}$$

解例 IV-4-8

$$s = \alpha + \beta x$$

$$t = -s$$

$$u = 1 + \exp(t)$$

$$f = \frac{1}{u} = u^{-1}$$

とおくと

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = 1$$

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = x$$

$$\frac{dt}{ds} = -1$$

$$\frac{du}{dt} = \exp(t)$$

$$\frac{df}{du} = -u^{-2}$$

合成関数の微分により

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{df}{du} \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{\partial s}{\partial \alpha} = (-u^{-2})(\exp(t))(-1)(1) \\ &= \frac{\exp(-(\alpha + \beta x))}{\left(1 + \exp(-(\alpha + \beta x))\right)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + \exp(-(\alpha + \beta x)))(1 + \exp(\alpha + \beta x))} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= \frac{df}{du} \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{\partial s}{\partial \beta} = (-u^{-2})(\exp(t))(-1)(x) \\ &= \frac{(x) \exp(-(\alpha + \beta x))}{\left(1 + \exp(-(\alpha + \beta x))\right)^2} \\ &= \frac{x}{(1 + \exp(-(\alpha + \beta x)))(1 + \exp(\alpha + \beta x))}\end{aligned}$$

問題 IV-4-9

以下の関数を偏微分しなさい。

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha + \beta x)}$$

解例 IV-4-9

$$s = \alpha + \beta x$$

$$t = 1 + \exp(s)$$

$$f = \frac{1}{t} = t^{-1}$$

とおくと

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = 1$$

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = x$$

$$\frac{dt}{ds} = \exp(s)$$

$$\frac{df}{dt} = -t^{-2}$$

合成関数の微分より

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{\partial s}{\partial \alpha} = (-t^{-2})(\exp(s))(1) \\ &= \frac{\exp(\alpha + \beta x)}{-\left(1 + \exp(\alpha + \beta x)\right)^2} \\ &= \frac{-1}{\left(1 + \exp(-(\alpha + \beta x))\right)\left(1 + \exp(\alpha + \beta x)\right)} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{\partial s}{\partial \beta} = (-t^{-2})(\exp(s))(x) \\ &= \frac{(x) \exp(\alpha + \beta x)}{-\left(1 + \exp(\alpha + \beta x)\right)^2} \\ &= \frac{-x}{\left(1 + \exp(-(\alpha + \beta x))\right)\left(1 + \exp(\alpha + \beta x)\right)}\end{aligned}$$

問題 IV-4-10

以下の関数を偏微分しなさい。

$$f(\alpha, \beta) = \ln \left(\frac{1}{1 + \exp(-(\alpha + \beta x))} \right)$$

解例 IV-4-10

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha + \beta x))}$$

とする。問題 IV-4-8 より

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \alpha} &= \frac{1}{(1 + \exp(-(\alpha + \beta x)))(1 + \exp(\alpha + \beta x))} \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} &= \frac{x}{(1 + \exp(-(\alpha + \beta x)))(1 + \exp(\alpha + \beta x))}\end{aligned}$$

対数微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln g(\alpha, \beta) &= \frac{\left(\frac{1}{(1+\exp(-(\alpha+\beta x)))(1+\exp(\alpha+\beta x))} \right)}{\left(\frac{1}{1+\exp(-(\alpha+\beta x))} \right)} \\ &= \frac{1}{1+\exp(\alpha+\beta x)} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \ln g(\alpha, \beta) &= \frac{\left(\frac{x}{(1+\exp(-(\alpha+\beta x)))(1+\exp(\alpha+\beta x))} \right)}{\left(\frac{1}{1+\exp(-(\alpha+\beta x))} \right)} \\ &= \frac{x}{1+\exp(\alpha+\beta x)}\end{aligned}$$

問題 IV-4-11

以下の関数を偏微分しなさい。

$$f(\alpha, \beta) = \ln \left(\frac{1}{1 + \exp(\alpha + \beta x)} \right)$$

解例 IV-4-11

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha + \beta x)}$$

とする。問題 IV-4-9 より

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \alpha} &= \frac{-1}{(1 + \exp(-(\alpha + \beta x)))(1 + \exp(\alpha + \beta x))} \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} &= \frac{-x}{(1 + \exp(-(\alpha + \beta x)))(1 + \exp(\alpha + \beta x))}\end{aligned}$$

対数微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln g(\alpha, \beta) &= \frac{\left(-\frac{1}{(1+\exp(-(\alpha+\beta x)))(1+\exp(\alpha+\beta x))} \right)}{\left(\frac{1}{1+\exp(\alpha+\beta x)} \right)} \\ &= \frac{-1}{1 + \exp(-(\alpha + \beta x))} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \ln g(\alpha, \beta) &= \frac{\left(\frac{-x}{(1+\exp(-(\alpha+\beta x)))(1+\exp(\alpha+\beta x))} \right)}{\left(\frac{1}{1+\exp(\alpha+\beta x)} \right)} \\ &= \frac{-x}{1 + \exp(-(\alpha + \beta x))}\end{aligned}$$

4.5 まとめ

- 合成関数の微分

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

- 対数微分法

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad ; \quad f(x) \neq 0$$

- 自然対数の導関数

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

- α が実数全体の x^α の導関数

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad ; \quad x > 0$$