

第Ⅳ部 冪乗モデル

3 指数関数と対数関数の微分

ポイント

- $\exp(x)$ の導関数
- $\ln x$ の導関数

3.1 はじめに

- 底を e とする指数関数と自然対数はとても便利な関数です。
- いたるところで利用されます。
- 底を選べるならば間違いなくネイピア数を選びます。
- その理由の一つが導関数にあります。

3.2 ネイピア数

定義

以下で定義される無理数をネイピア数と呼び e という記号であらわす。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1)$$

ネイピア数 e は

$$e = 2.7182818284\ 5904523536 \dots \quad (2)$$

と続く無理数である。

ネイピア数 e は冪乗の底となることが多い。そこで、 e の冪乗を

$$e^x = \exp(x) \quad (3)$$

とあらわす。

3.3 指数関数

$a > 0$ であれば、冪数は実数全体へ拡張されている。従って $a > 0$ であれば、任意の実数 x, y に対して、

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (4)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (5)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (6)$$

が成り立つ。冪数を変数として定義された関数 $y = a^x$ を指数関数と呼ぶ。

3.3.1 e を底とする指数法則の確認

e を底とする指数法則を示しておく。

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (7)$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (8)$$

$$e^{xy} = (e^x)^y \quad (9)$$

$$e^0 = 1 \quad (10)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (11)$$

また、(7) (8) は

$$\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y) \quad (12)$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (13)$$

とあらわすこともできる。

3.4 対数関数

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ ならば $y > 0$ の値を指定すれば、指数関数 $y = a^x$ を満たす x の値はただ一つ決まる。そこで $y = a^x$ を x に関して解いた式を

$$x = \log_a y \quad (14)$$

という記号であらわし対数関数とよぶ。

対数関数の定義域は、 $(0, +\infty)$ であり、値域は $(-\infty, +\infty)$ である。

3.4.1 対数における各部の名称

(14) 式右辺を対数と呼ぶ。対数

$$\log_a b \quad (15)$$

において、 a を『^{てい}底』、 b を『^{しんすう}真数』とよぶ。 b から (15) を求めることを『 a を底とする対数をとる』という。特に底が、ネイピア数 e のとき、

$$\ln b \quad (16)$$

とあらわし、『自然対数』と呼ぶ。 b から (16) を求めることを『自然対数をとる』という。

問題 IV-3-1

以下の対数関数を指数関数であらわしなさい。

$$y = \ln x$$

問題 IV-3-2

以下の指数関数を対数関数であらわしなさい。

(1) $e^1 = e$

(2) $e^0 = 1$

解例 IV-3-1

$$e^y = x$$

解例 IV-3-2

$$(1) \quad \ln e = 1$$

$$(2) \quad \ln 1 = 0$$

問題 IV-3-3

$x, y > 0$ とする。以下の式が成り立つことを示しなさい。

$$(1) \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$(2) \quad \ln xy = \ln x + \ln y$$

$$(3) \quad \ln x^y = y \ln x$$

解例 IV-3-3-(1)

天下りの的に

$$x = e^n$$

$$y = e^m$$

とおき、両式を対数関数であらわす。

$$n = \ln x$$

$$m = \ln y$$

ここで x と y の商を考える。

$$\frac{x}{y} = \frac{e^n}{e^m} = e^{n-m}$$

最左辺と最右辺をとり対数関数であらわすと

$$\begin{aligned}\ln \frac{x}{y} &= n - m \\ &= \ln x - \ln y\end{aligned}$$

である。

解例 IV-3-3-(2)

天下りの的に

$$x = e^n$$

$$y = e^m$$

とおき、両式を対数関数であらわす。

$$n = \ln x$$

$$m = \ln y$$

ここで x と y の積を考える。

$$xy = e^n e^m = e^{n+m}$$

最左辺と最右辺をとり対数関数であらわすと

$$\begin{aligned}\ln xy &= n + m \\ &= \ln x + \ln y\end{aligned}$$

である。

解例 IV-3-3-(3)

天下りの的に

$$x = e^n$$

とおき、対数関数であらわす。

$$n = \ln x$$

ここで x の y 乗を考える。

$$x^y = (e^n)^y = e^{yn}$$

最左辺と最右辺をとり対数関数であらわすと

$$\begin{aligned}\ln x^y &= yn \\ &= y \ln x\end{aligned}$$

である。

3.4.2 自然対数の公式

ここで確認した結果を公式としてまとめて示しておく。 $x, y > 0$ とする。

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad (17)$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad (18)$$

$$\ln x^y = y \ln x \quad (19)$$

$$\ln 1 = 0 \quad (20)$$

$$\ln e = 1 \quad (21)$$

3.5 天下りの準備

ネイピア数 e の定義

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (22)$$

において $h = \frac{1}{x}$ とおくと、 $\frac{1}{h} = x$ であって、 $x \rightarrow \infty$ のとき、 $h \rightarrow 0$ となるから

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} \quad (23)$$

である。

$(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ を真数とする自然対数を取る

$$\ln(1 + h)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{h} \ln(1 + h) \quad (24)$$

$$= \frac{\ln(1 + h)}{h} \quad (25)$$

ここで、 $h \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + h)^{\frac{1}{h}} \quad (26)$$

である。

(23) により、右辺の真数部分が e になり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = \ln e \quad (27)$$

右辺の底と真数が等しいので

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad (28)$$

である。ここで

$$\ln(1+h) = \lambda \quad (29)$$

とおき、指数関数であらわすと

$$1+h = e^\lambda \quad (30)$$

を得る。これを h に関して解くと

$$h = e^\lambda - 1 \quad (31)$$

である。(30) において

$$\lambda \rightarrow 0 \quad (32)$$

とすると右辺は 1 に収束するから、左辺も 1 に収束する。

よって

$$\lambda \rightarrow 0 \implies h \rightarrow 0 \quad (33)$$

である。ここで、(29) を (31) で割ると

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} \quad (34)$$

(34) において $\lambda \rightarrow 0$ とすると、 $h \rightarrow 0$ であり、左辺は (28) により 1 に収束するから右辺も 1 に収束する。

したがって、

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{e^{\lambda} - 1} = 1 \quad (35)$$

である。

この (35) の分母と分子を入れ替え、 λ を h に書き換えると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad (36)$$

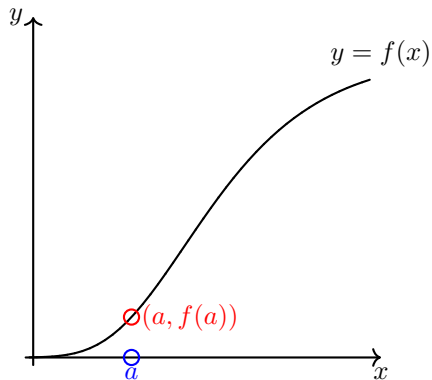
が成り立つ。

3.6 導関数

3.6.1 関数 $f(x)$ の $x = a$ の点

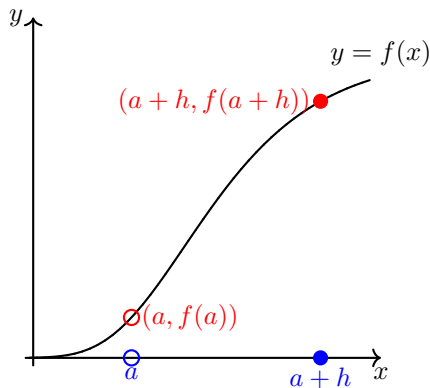
連続な関数 $f(x)$ を考える。この関数の定義域内に点 a をとる。この $x = a$ に対応する関数 $f(x)$ 上の点の座標は $(a, f(a))$ である。

図1 $f(x)$ と x 軸上の点 a



3.6.2 a から h 離れた点

定義域内において、 x 軸上で a から h 離れた点をとる。ここで $h \neq 0$ とする。 $x = a + h$ に対応する $f(x)$ 上の点は $(a + h, f(a + h))$ である。

図2 $x = a + h$ に対応する $f(x)$ の点

3.6.3 x の変化量と y の変化量

ここで x 軸上の変化量は

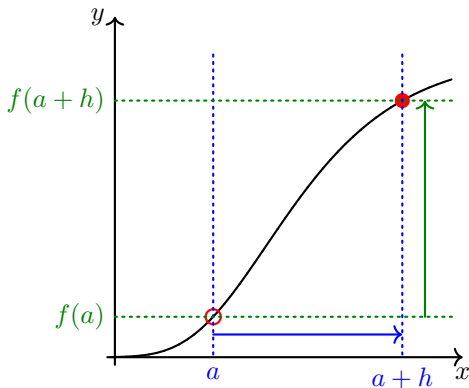
$$h \quad (37)$$

であり、 y 軸上の変化量は

$$f(a+h) - f(a) \quad (38)$$

である。

図3 x の変化量と y の変化量

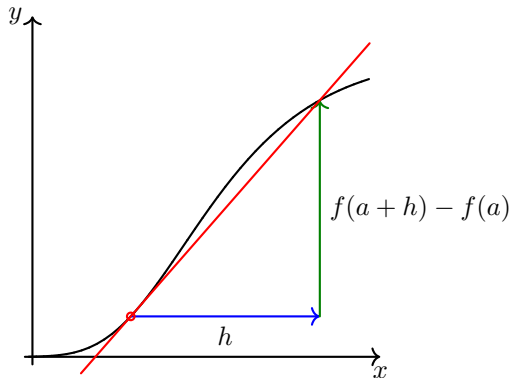


3.6.4 x と y の変化の割合

ここで x 軸上の変化量と y 軸上の変化量の比をとり変化の割合

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (39)$$

をもとめる。この値は、点 $(a, f(a))$ と点 $(a+h, f(a+h))$ を通る直線の傾きである。

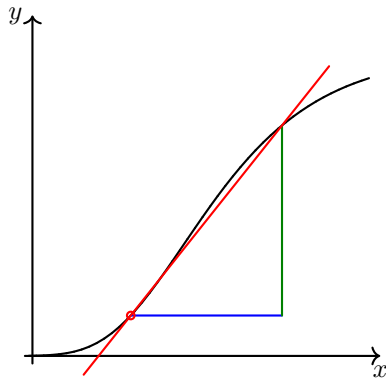
図4 x と y の変化の割合

3.6.5 $h \rightarrow 0$ の時の傾き

ここで h を h が 0 になることなく、限りなく 0 に近づくことを考える。

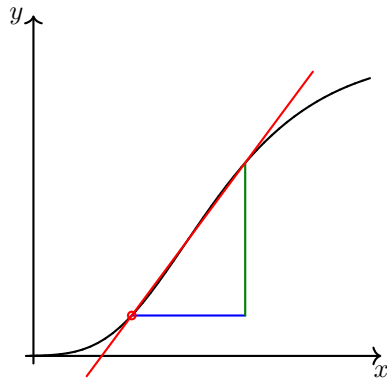
h が変化することにより変化の割合も変化する。

図 5 h が少し 0 に近づいた時の傾き



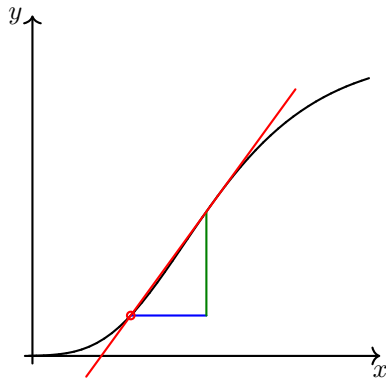
h を少し 0 に近づけると、変化の割合は h の変化により影響を受ける。

図 6 h がもう少し 0 に近づいた時



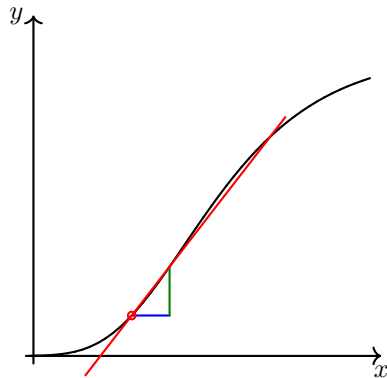
h を更に 0 に近づけると、 $(a, f(a))$ と $(a + h, f(a + h))$ は関数上において近づいていき、それに伴い、変化の割合も変化してゆく。

図7 h が更に 0 に近づいた時



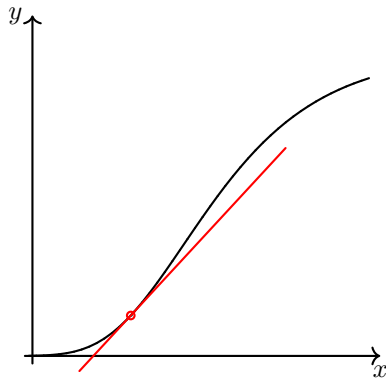
h をかなり 0 に近づけると、関数上の 2 点は相当に近づいてゆく。

図 8 h がかなり 0 に近づいた時



h を限りなく 0 に近づけると、2 点は限りなく近づき、(39) は $(a, f(a))$ における変化の割合を示す。

図 9 h が限りなく 0 に近づいた時



定義

関数 $f(x)$ が与えられたとき、定義域内に $x = a$ と a から h 離れた点 $a + h$ を考える。ここで $h \neq 0$ とする。 x の変化量 h と x が h 変化したことによってもたらされる関数 $f(x)$ の変化量 $f(a + h) - f(a)$ を用いて変化の割合を求める。ここで、 h が 0 になることなく h を限りなく 0 に近づける。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (40)$$

この時に (40) が値を取るならば、関数 $f(x)$ は点 a で微分可能といい、その値を $x = a$ の微分係数という。

微分係数は、 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$ という記号を使ってあらわす。

定義

微分係数は a が変れば変化する。従って (40) 式は a の関数である。そこで (40) の a を x で置き換えた式を導関数という。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (41)$$

$f(x)$ から導関数を求めることを『微分する』という。また $f(x)$ を『原始関数』と呼ぶ。

3.6.6 導関数の表記法

導関数は様々な記号であらわされることが多い。これらの表現は、その時に説明しようとする内容によって使い分けられている。 $y = f(x)$ とすると

$$\begin{array}{ll} (f(x))' & \frac{dy}{dx} \\ \frac{d}{dx}f(x) & f'(x) \end{array}$$

はすべて導関数をあらわす記号である。

3.6.7 $\alpha f(x)$ の導関数

$f(x)$ を微分可能とし、 α を定数とする。

$$(\alpha f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} \quad (42)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (43)$$

$$= \alpha f'(x) \quad (44)$$

3.7 $f(x) = e^x$ の導関数

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \quad (45)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \quad (46)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \quad (47)$$

(36) より、第 2 因数が 1 に収束するので

$$= e^x (1) \quad (48)$$

$$= e^x \quad (49)$$

問題 IV-3-4

次の関数を微分しなさい。ただし、 α は定数とする。

$$y = \exp(\alpha + x)$$

解例 IV-3 - 4

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\exp(\alpha + x))' \\ &= (\exp(\alpha) \exp(x))' \\ &= \exp(\alpha) (\exp(x))' \\ &= \exp(\alpha) \exp(x) \\ &= \exp(\alpha + x)\end{aligned}$$

3.8 $f(x) = \ln x$ の導関数

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} \quad (50)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (\ln(x + \Delta x) - \ln x) \quad (51)$$

対数の公式 (18) より

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x} \quad (52)$$

真数の分母をそれぞれに持たせて

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \quad (53)$$

$\frac{x}{x} = 1$ を掛け

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{x}{x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \quad (54)$$

掛け算の順序を入れ替え

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{x}{x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \quad (55)$$

分数の掛け算を分数の割り算としてあらわし

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \quad (56)$$

ここで $h = \frac{\Delta x}{x}$ とおくと $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $h \rightarrow 0$ なので (28) より

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1 \quad (57)$$

従って、(56) 式第 2 因数が 1 なので

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (58)$$

が成り立つ。

問題 IV-3-5

次の関数を微分しなさい。ただし $x > 0, \alpha$ は定数とする。

$$y = \ln x^\alpha$$

解例 IV-3 - 5

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\ln x^\alpha)' \\ &= (\alpha \ln x)' \\ &= \alpha (\ln x)' \\ &= \alpha \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{\alpha}{x}\end{aligned}$$

3.9 まとめ

- e^x は微分しても変わらないただ一つの関数

$$(e^x)' = e^x$$

- 自然対数の導関数は

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad ; x > 0$$

- 底が e であることがとても重要