

第Ⅳ部 冪乗モデル

2 指数関数と対数関数

ポイント

- 指数関数
- 対数関数

- 対数変換

2.1 はじめに

- 関数 $y = f(x)$ では、 x が決まると y が決まります。
- 見方を変えると y で x が決まるとみることもできます。
- でも、 $y = f(x)$ は必ず x に関して解けるわけではないのです。

2.2 指数関数

2.2.1 指数法則

$a > 0$ と任意の実数 n, m に対し以下の法則が成り立つ。これらの法則を指数法則と呼ぶ。

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad (1)$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (2)$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad (3)$$

$$a^0 = 1 \quad (4)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (5)$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (6)$$

2.2.2 ネイピア数 e

ネイピア数を e であらわし

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (7)$$

と定義する。ネイピア数 e は底とすることが多い。そこで

$$e^x = \exp(x) \quad (8)$$

とあらわす。ネイピア数 e は、

$$e = 2.7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 4709369995\ \dots \quad (9)$$

とつづく無理数である。

定義

$a > 0$ と任意の実数 x, y に対して、

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (10)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (11)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (12)$$

が成り立つ。このように冪数を変数として定義された関数 $y = a^x$ を『指数関数』と呼ぶ。

問題 IV-2-1

表 1 を使い以下の問いに答えなさい。

1. $y = a^x$ において $a = 2.0$ として表 1 に示す x に対応する値を求め空欄を埋めなさい。
2. 完成した表 1 の値をグラフにあらわしなさい。

表 1 $y = 2.0^x$ の値

x	$y = 2.0^x$
-2.0	
-1.0	
0.0	
0.5	
1.0	
1.5	
2.0	

解例 IV-2-1

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$2^0 = 1$$

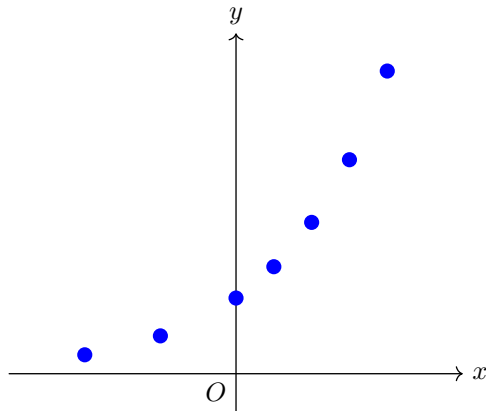
$$2^{0.5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.41421\dots$$

$$2^1 = 2$$

$$2^{1.5} = 2^{1+0.5} = 2^1 2^{0.5} = 2\sqrt{2}$$

$$2^2 = 4$$

図 1 表 1 の散布図



問題 IV-2-2

表 2 を使い以下の問いに答えなさい。

1. $y = a^x$ において $a = 0.5$ として表 2 に示す x に対応する値を求め空欄を埋めなさい。
2. 完成した表 2 の値をグラフにあらわしなさい。

表 2 $y = 0.5^x$ の値

x	$y = 0.5^x$
-2.0	
-1.5	
-1.0	
-0.5	
0.0	
1.0	
2.0	

解例 IV-2-2

$$0.5^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2$$

$$0.5^{-1.5} = (2^{-1})^{-1.5} = 2^{1.5}$$

$$0.5^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^{1.0}$$

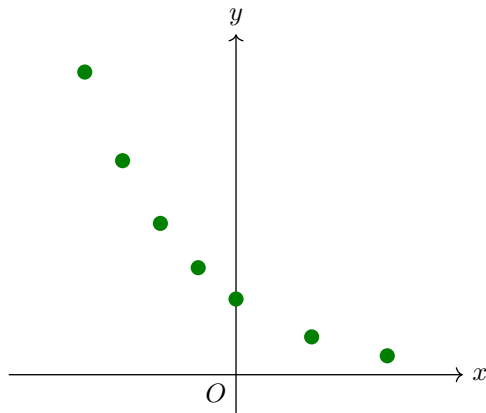
$$0.5^{-0.5} = (2^{-1})^{-0.5} = 2^{0.5}$$

$$0.5^0 = 1$$

$$0.5^1 = (2^{-1})^1 = 2^{-1}$$

$$0.5^2 = (2^{-1})^2 = 2^{-2}$$

図 2 表 2 の散布図



2.3 狭義の単調関数

定義

$y = f(x)$ において

$$x_i < x_j \iff f(x_i) < f(x_j) \quad (13)$$

を満たす関数を「狭義の単調増加関数」という。同様に

$$x_i < x_j \iff f(x_i) > f(x_j) \quad (14)$$

を満たす関数を「狭義の単調減少関数」という。合わせて「狭義の単調関数」という。

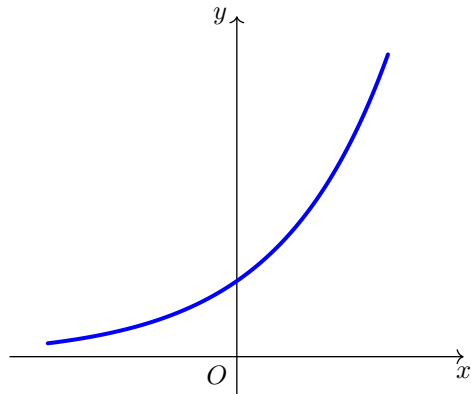
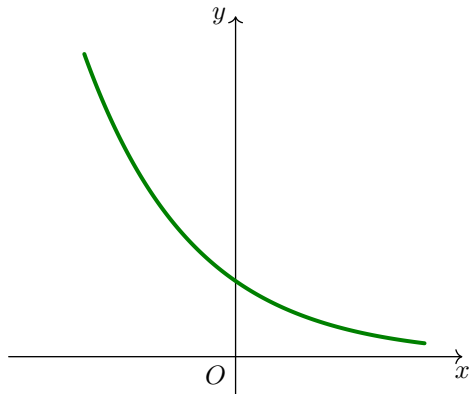
2.3.1 a の値と単調関数の関係

指数関数 $y = a^x$ において、

$$1 < a \quad \Longrightarrow \quad y = a^x \text{ は「狭義の単調増加関数」} \quad (15)$$

$$0 < a < 1 \quad \Longrightarrow \quad y = a^x \text{ は「狭義の単調減少関数」} \quad (16)$$

である。

図3 $y = 2.0^x$ のグラフ図4 $y = 0.5^x$ のグラフ

2.3.2 狭義の単調関数の性質

狭義の単調関数は、

$$x_i \neq x_j \iff f(x_i) \neq f(x_j) \quad (17)$$

である。

$$a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \implies y = a^x \text{ は、狭義の単調関数} \quad (18)$$

である。したがって $a > 0$ かつ $a \neq 1$ ならば

$$x_i \neq x_j \iff a^{x_i} \neq a^{x_j} \quad (19)$$

である。このことは、 a^{x_i} に対応する x_i はただ一つであることを意味する。

2.4 対数関数

定義

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ ならば $y > 0$ の値を指定すれば、指数関数 $y = a^x$ を満たす x の値はただ一つ決まる。そこで $y = a^x$ を x に関して解いた式を

$$x = \log_a y \quad (20)$$

という記号であらわす。

2.4.1 対数における各部の名称

(20) 式右辺を対数と呼ぶ。対数

$$\log_a b \quad (21)$$

において、 a を『^{てい}底』、 b を『^{しんすう}真数』とよぶ。 b から (21) を求めることを『 a を底とする対数をとる』という。

特に底が、ネイピア数 e のとき、

$$\ln b \quad (22)$$

とあらわし、『自然対数』と呼ぶ。 b から (22) を求めることを『自然対数をとる』という。

2.4.2 対数関数とは

数学では、関数をあらわすときの記号は x を独立変数とし、 y を従属変数とする場合が多い。この慣習に従い、(20) 式の x と y の記号を入れ替えた式

$$y = \log_a x \quad (23)$$

を対数関数とよぶ。対数関数の定義域は、 $(0, +\infty)$ であり、値域は $(-\infty, +\infty)$ である。

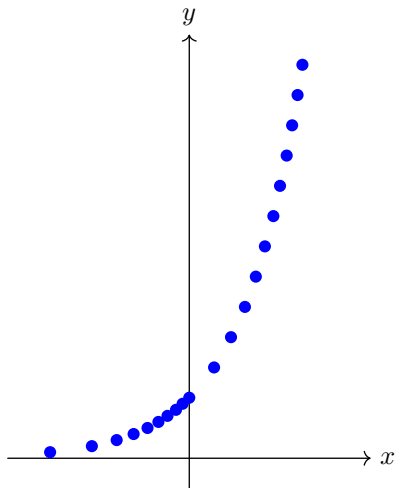
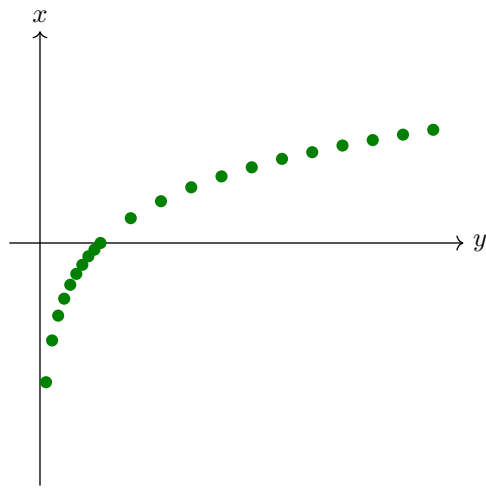
問題 IV-2-3

$y = 2.72^x$ とする。何らかのアプリを使い以下の値を求め散布図にあらわしなさい。

x	y
-2.30	
-1.61	
-1.20	
-0.92	
-0.69	
-0.51	
-0.36	

x	y
-0.22	
-0.11	
0.00	
0.41	
0.69	
0.92	
1.10	

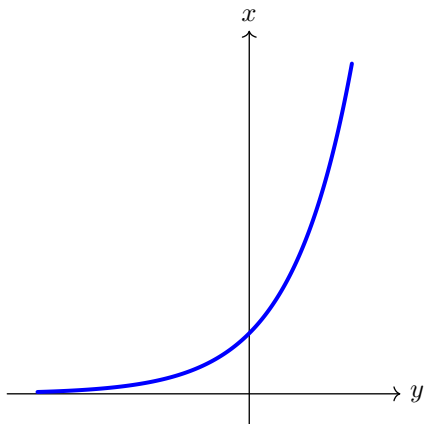
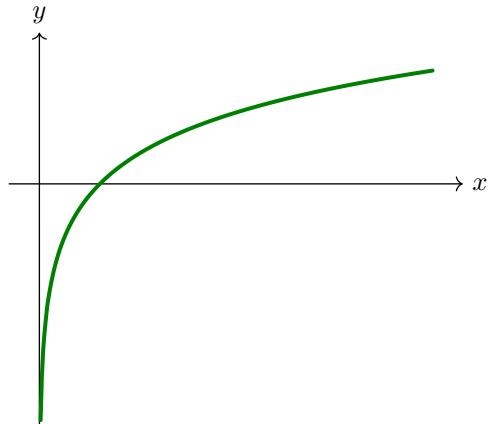
x	y
1.25	
1.39	
1.50	
1.61	
1.70	
1.79	
1.87	

図5 横軸を x とする表現図6 横軸を y とする表現

2.5 指数関数と対数関数の関係

$y = f(x)$ において y に対応する x がただ一つに決まるとき、 y を x に対応させる関数を関数 $f(x)$ の『逆関数』という。

$y = \log_a x$ は $x = a^y$ の逆関数なので、 $y = \log_a x$ と $x = a^y$ は x と y の関係式としては同じである。

図7 $x = \exp(y)$ のグラフ図8 $y = \ln x$ のグラフ

問題 IV-2-4

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ 、 x と y はともに正値とする。以下の指数関数を対数関数であらわしなさい。

(1) $x = a^m$

(2) $y = a^n$

(3) $1 = a^0$

(4) $a = a^1$

解例 IV-2-4

(1) $m = \log_a x$

(2) $n = \log_a y$

(3) $\log_a 1 = 0$

(4) $\log_a a = 1$

2.5.1 指数関数と対数関数

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする。ここで a を底とする二つの指数関数を考える。当然 x と y は正値である。

$$x = a^m \tag{24}$$

$$y = a^n \tag{25}$$

この二つの指数関数を対数関数であらわすと

$$m = \log_a x \tag{26}$$

$$n = \log_a y \tag{27}$$

2.5.2 対数関数の和

(24) と (25) の両辺同士の積を考える。

$$xy = a^m a^n \quad (28)$$

$$= a^{m+n} \quad (29)$$

最左辺と最右辺からなる指数関数は、

$$xy = a^{m+n} \quad (30)$$

である。

これを対数関数であらわすと、

$$m + n = \log_a xy \quad (31)$$

を得る。ここで (26)(27) より

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy \quad (32)$$

が成り立つ。

2.5.3 対数関数の差

(24) と (25) の両辺同士の商を考える。

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} \quad (33)$$

$$= a^{m-n} \quad (34)$$

最左辺と最右辺からなる指数関数は、

$$\frac{x}{y} = a^{m-n} \quad (35)$$

である。

これを対数関数であらわすと、

$$m - n = \log_a \frac{x}{y} \quad (36)$$

を得る。ここで (26)(27) より

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad (37)$$

が成り立つ。

2.5.4 対数関数の定数倍

(24) の両辺を、実数 b を冪数として冪乗する。

$$x^b = (a^m)^b \quad (38)$$

$$= a^{bm} \quad (39)$$

最左辺と最右辺からなる指数関数は、

$$x^b = a^{bm} \quad (40)$$

である。

これを対数関数であらわすと、

$$bm = \log_a x^b \quad (41)$$

を得る。ここで (26) より

$$b \log_a x = \log_a x^b \quad (42)$$

が成り立つ。

定理 IV-2-1

対数において以下の法則が成り立つ。ここで、 $a \neq 1$ かつ $a > 0$, b は実数, x と y はともに正値とする。

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (43)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (44)$$

$$\log_a x^b = b \log_a x \quad (45)$$

$$\log_a 1 = 0 \quad (46)$$

$$\log_a a = 1 \quad (47)$$

2.6 対数変換

定義

$y > 0, f(x) > 0$ として $y = f(x)$ とする。この関数の両辺を真数とする自然対数をとると以下の式が成り立つ。この変換を対数変換という。

$$\ln y = \ln f(x) \quad (48)$$

問題 IV-2-5

以下の関数を対数変換しなさい。

$$(1) \quad y = \alpha x^\beta$$

ただし、 $x > 0, y > 0, \alpha > 0$

$$(2) \quad y = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_m^{\beta_m}$$

ただし、 $y > 0, \beta_0 > 0, x_j > 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots m$

$$(3) \quad L = p_1^{y_1} (1 - p_1)^{1-y_1} p_2^{y_2} (1 - p_2)^{1-y_2} \cdots p_n^{y_n} (1 - p_n)^{1-y_n}$$

ただし、 $L > 0, \quad 0 < p_i < 1 \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots n$

解例 IV-2-5-(1)

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \alpha x^\beta \\ &= \ln \alpha + \ln x^\beta \\ &= \ln \alpha + \beta \ln x\end{aligned}$$

解例 IV-2-5-(2)

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_m^{\beta_m} \\ &= \ln \beta_0 + \ln x_1^{\beta_1} + \ln x_2^{\beta_2} + \cdots + \ln x_m^{\beta_m} \\ &= \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + \cdots + \beta_m \ln x_m\end{aligned}$$

解例 IV-2-5-(3)

$$\begin{aligned}\ln L &= \ln \left(p_1^{y_1} (1-p_1)^{1-y_1} p_2^{y_2} (1-p_2)^{1-y_2} \cdots p_n^{y_n} (1-p_n)^{1-y_n} \right) \\&= \ln p_1^{y_1} + \ln (1-p_1)^{1-y_1} + \ln p_2^{y_2} + \ln (1-p_2)^{1-y_2} + \cdots + \ln p_n^{y_n} + \ln (1-p_n)^{1-y_n} \\&= y_1 \ln p_1 + (1-y_1) \ln (1-p_1) + y_2 \ln p_2 + (1-y_2) \ln (1-p_2) \\&\quad + \cdots + y_n \ln p_n + (1-y_n) \ln (1-p_n) \\&= \sum_{i=1}^n (y_i \ln p_i + (1-y_i) \ln (1-p_i))\end{aligned}$$

2.7 まとめ

- $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする。 $x = a^y$ を y に関して解いた式が

$$y = \log_a x$$

- $y = a^x$ を指数関数とよび $y = \log_a x$ を対数関数とよぶ。
- 対数関数の定義域は $(0, +\infty)$ 、値域は $(-\infty, +\infty)$ である。
- 対数において、底が e のとき自然対数といい、 $\ln x$ とあらわす。
- $y > 0, f(x) > 0$ とする。 $y = f(x)$ において、両辺を真数とする自然対数をとる事を対数変換という。

$$\ln y = \ln f(x)$$