第 IV 部　冪乗モデル

1　冪乗と冪数

ポイント

- 指数法則
- ネイピア数

1.1　はじめに

- 「冪」という文字があります。
- 「べき」と読みます。「覆う、覆うもの」という意味です。
- この文字は常用漢字・当用漢字に含まれず、1950 年代以降の学習参考書などの出版物では仮名書きで「べき乗」または「累乗」への書き換えが進められました。
- 結果として初等数学の教科書ではもっぱら「累乗」が用いられました。

命題 1

$a,\ b$ を任意の実数とすると、

$$|a| - |b| \leqq |a - b| \tag{1}$$

が成り立つ。

$a = 0$ の場合

$$|a| - |b| = 0 - |b| = -|b| \tag{2}$$

$$|a - b| = |0 - b| = |b| \tag{3}$$

なので

$$|a| - |b| \leqq |a - b| \tag{4}$$

$a > 0,\ b > 0,\ a \geqq b$ の場合

$$|a| - |b| = a - b \tag{5}$$

$$|a - b| = a - b \tag{6}$$

なので

$$|a| - |b| = |a - b| \tag{7}$$

$a > 0,\ b > 0,\ a < b$ の場合

$$a < b \tag{8}$$

$$a - b < 0 \tag{9}$$

$$|a - b| > 0 \tag{10}$$

であって

$$|a| < |b| \tag{11}$$

$$|a| - |b| < 0 \tag{12}$$

なので

$$|a| - |b| < |a - b| \tag{13}$$

$a > 0,\ b = 0$ の場合

$$|a| - |b| = |a| - 0 = |a| \tag{14}$$

$$|a - b| = |a - 0| = |a| \tag{15}$$

なので

$$|a| - |b| = |a - b| \tag{16}$$

$a > 0,\ b < 0$ の場合

$$|a| - |b| = a - |b| \tag{17}$$

$$|a - b| = a + |b| \tag{18}$$

なので

$$|a| - |b| < |a - b| \tag{19}$$

$a < 0,\ b > 0$ の場合

$$|a| - |b| = |a| - b \tag{20}$$

$$|a - b| = |a| + b \tag{21}$$

なので

$$|a| - |b| < |a - b| \tag{22}$$

$a < 0,\ b = 0$ の場合

$$|a| - |b| = |a| - 0 = |a| \tag{23}$$

$$|a - b| = |a - 0| = |a| \tag{24}$$

なので

$$|a| - |b| = |a - b| \tag{25}$$

問題 IV−1 − 4

$a < 0,\ b < 0$ のとき

$$|a| - |b| \leqq |a - b|$$

が成り立つことを示せ。

解例 IV−1 − 1

$a < b$ の場合

$$\begin{aligned} |a| &= -a \\ |b| &= -b \\ |a| - |b| &= -a - (-b) \\ &= -a + b \\ &= b - a \end{aligned}$$

であって

$$|a - b| = b - a$$

なので

$$|a| - |b| = |a - b|$$

$a \geqq b$ の場合

$$\begin{aligned} |a| &\leqq |b| \\ |a| - |b| &\leqq 0 \end{aligned}$$

なので

$$|a| - |b| \leqq |a - b|$$

全ての場合において命題１が成り立つ。

定理 III−3 − 1

集合 S が上に有界であれば S は上限を持つ。S が下に有界であれば S は下限を持つ。

証明は第 III 部　線型モデル 3 最もよく当てはまった直線の傾きと切片参照

1.2 数列の極限

数を並べた

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{26}$$

を数列といい、

$$\{a_n\} \quad ; n = 1, 2 \cdots \tag{27}$$

あるいは、単に

$$\{a_n\} \tag{28}$$

とあらわす。この a_n をその数列の『第 n 項』という。特に a_1 を『初項』という。無限個の項からなる数列を『無限数列』とよぶ。

n が大きくなるにつれて a_n が一定値 α に限りなく近づいてゆくとき、すなわち $|a_n - \alpha|$ が限りなく 0 に近づくとき数列 $\{a_n\}$ は α に『収束する』といい、α をこの数列の『極限』あるいは『極限値』という。

$\{a_n\}$ が収束しないとき、この数列は『発散する』という。発散する場合は a_n が限りなく大きくなる場合、あるいは限りなく $-\infty$ に近づく場合と、いつまでも振動しつづけて行先が定まらない場合がある。ここでは収束するケースについて議論する。

定義

数直線上に点 α をとり、別に正数 ε をとって α を中心として前後に ε の幅をもった開区間

$$(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon) \tag{29}$$

をつくる。この開区間を α の『$\varepsilon-$ 近傍』という。

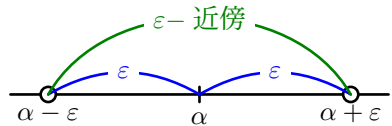
$\varepsilon-$ 近傍は α からの距離が ε より近い点の全体であるから

$$\left\{x \,\middle|\, |x-\alpha|<\varepsilon\right\} \tag{30}$$

とあらわすこともできる。

ε はギリシャ文字イプシロンの小文字である。

図 1　$\varepsilon-$ 近傍の範囲



1.2.1 a_n が限りなく α に近づくとは

- 「$n \to \infty$ のとき a_n が限りなく α に近づく」ということは、「どんなに小さく正数 ε を与えても、n が十分大きくなれば α と a_n との距離 $|a_n - \alpha|$ は ε よりもさらに小さくなる」ということである。
- このことは数列 $\{a_n\}$ のある番号より先の項は全て α の $\varepsilon-$ 近傍の中に入ってしまうことを意味する。
- したがって、どんなに小さく $\varepsilon > 0$ を与えても、ある番号 n_0 を見つけることはできる。
- どの番号から先の a_n が α の $\varepsilon-$ 近傍に入るかは ε の大きさによって変わる。そこでこの番号を $n(\varepsilon)$ とあらわす。

定義

数列 $\{a_n\}$ と実数 α が与えれられたとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 $n(\varepsilon)$ を

$$n > n(\varepsilon) \text{ を満たす全ての } n \text{ に対して } |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{31}$$

が成り立つように選ぶことができるならば、その時、数列 $\{a_n\}$ は『α に収束する』といい、α を数列の『極限』という。

α の $\varepsilon-$ 近傍を用いれば (31) は

$$n > n(\varepsilon) \text{ を満たす全ての } n \text{ に対して } a_n \in (\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon) \tag{32}$$

と書くこともできる。

α が $\{a_n\}$ の極限であることを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{33}$$

あるいは

$$n \to \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \to \alpha \tag{34}$$

であらわす。

定義・参考

数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき、任意の $M > 0$ に対して番号 $n(M)$ を

$$n > n(M) \text{ を満たす全ての } n \text{ に対して } a_n > M$$

となるように選ぶことができるならば、$\{a_n\}$ は『∞ に発散する』という。このことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{あるいは、} \quad n \to \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \to \infty$$

であらわす。$\lim_{n\to\infty} = -\infty$ の場合も同様である。

1.3 単調数列

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \tag{35}$$

となっているとき、この数列は『単調増加』であるといい、

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots \tag{36}$$

のとき、『単調非減少』であるという。

同様に

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots \tag{37}$$

のとき『単調減少』であるといい、

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq \cdots \tag{38}$$

のとき、『単調非増加』であるという。

これらを総称して『単調』であるという。そしてそれらの数列を『単調数列』という。

定義

全ての n について

$$|a_n| \leqq M \tag{39}$$

となる正数 M があるとき、数列 $\{a_n\}$ は『有界』であるという。

定理 IV−1 − 1

収束する数列は有界である。

証明

$\{a_n\}$ は収束するとし、極限を α とする。$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ だから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$n > n(\varepsilon)$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる番号 $n(\varepsilon)$ がある。そこで $\varepsilon = 1$ とおく。このとき $n > n(1)$ ならば

$$|a_n - \alpha| < 1 \tag{40}$$

である。

一般に

$$|a_n| - |\alpha| \leqq |a_n - \alpha| \tag{41}$$

が成り立つので、

$$|a_n - \alpha| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| - |\alpha| < 1 \tag{42}$$

すなわち

$$|a_n| < |\alpha| + 1 \tag{43}$$

となる番号 $n(1)$ がとれる。

そこで、$n(1)+1$ 個の数

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_{n(1)}|,\ |\alpha|+1 \tag{44}$$

のうちの最大の数を M とおけば、全ての n に対して

$$|a_n| \leqq M \tag{45}$$

が成立する。よって $\{a_n\}$ は有界である。(終)

定理 IV−1 − 2(Weierstrass の定理)

単調で有界な数列は収束する。

証明

数列 $\{a_n\}$ は単調非減少であるとする。仮定によりこの数列は有界であるから、全ての n に対して $a_n \leqq M$ となる M がある。M は数列 $\{a_n\}$ の上界である。上界を持つので、全ての a_n の集合は上限を持つ。その上限を α とすれば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{46}$$

である。なぜならば、α は集合 $\{a_n\}$ の最小の上界だから、どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $\alpha - \varepsilon$ は $\{a_n\}$ の上界ではない。

したがって $\alpha - \varepsilon < a_m \leqq \alpha$ となる項 a_m が必ずある。

しかも数列 $\{a_n\}$ は単調非減少だから、m より大きい全ての n に対して

$$\alpha - \varepsilon < a_m \leqq a_n \leqq \alpha \tag{47}$$

である。最左辺と a_n において

$$\alpha - \varepsilon < a_n \tag{48}$$

$$\alpha - a_n < \varepsilon \tag{49}$$

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{50}$$

が成立する。

ここで $\varepsilon > 0$ は任意であったから、$m = n(\varepsilon)$ と考えれば、(31) の定義から、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つことがわかる。$\{a_n\}$ が単調非増加の場合も同様にして証明できる。(終)

1.4 冪乗と指数法則

a を n 回掛けることを『冪乗(べきじょう)』または『累乗(るいじょう)』といい a^n とあらわす。このとき、a を『底(てい)』といい、n を『冪数(べきすう)』『冪指数』または『累乗の指数』という[1)]。「a^n」は「a の n 乗」と読む。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}} \tag{51}$$

1) 本講座では冪乗・冪数とあらわす。

n が自然数の場合以下の関係が成り立つ[2)]。

$$a > 1 \iff a^n > 1 \tag{52}$$

$$a = 1 \iff a^n = 1 \tag{53}$$

$$0 < a < 1 \iff 0 < a^n < 1 \tag{54}$$

2) 本稿では底は正の場合のみを扱うが、底が負の場合は別の法則が存在する。

1.4.1 積の冪乗

$a > 0,\ b > 0$ であって n は自然数とする。

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \times (ab) \times \cdots \times (ab)}_{n\ 個} \tag{55}$$

$$= a \times b \times a \times b \times \cdots \times a \times b \tag{56}$$

$$= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n\ 個} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{n\ 個} \tag{57}$$

$$= a^n b^n \tag{58}$$

1.4.2 冪乗の積

$a > 0$ であって、n, m はともに自然数とする。

$$a^n \times a^m = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n\text{ 個}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m\text{ 個}} \tag{59}$$

$$= \underbrace{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}} \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個}}}_{n+m\text{ 個}} \tag{60}$$

$$= a^{n+m} \tag{61}$$

1.4.3 冪乗の商

$a > 0$ 、 n, m はともに自然数であって、$n > m$ とする。

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ 個}}} \tag{62}$$

$$= \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n-m \text{ 個}} \times \overbrace{\not{a} \times \not{a} \times \cdots \times \not{a}}^{m \text{ 個}}}{\underbrace{\not{a} \times \not{a} \times \cdots \times \not{a}}_{m \text{ 個}}} \tag{63}$$

$$= a^{n-m} \tag{64}$$

1.4.4 冪数の 0 への拡張

冪乗の商において $n = m = b$ とすると、

$$a^{n-m} = a^{b-b} = a^0 \tag{65}$$

とあらわすことができる。ここで $\dfrac{a^n}{a^m}$ を求めると

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^b}{a^b} = 1 \tag{66}$$

である。従って

$$a^0 = 1 \tag{67}$$

と定義する。

1.4.5 冪数の負の整数への拡張

冪乗の商において $n = 0, m$ は自然数とすると、

$$a^{0-m} = a^{-m} \tag{68}$$

とあらわすことができる。ここで $\dfrac{a^0}{a^m}$ を求めると

$$\frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \tag{69}$$

となる。なので

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \tag{70}$$

と定義する。

1.4.6 冪乗の冪乗

$a > 0$ とし、n, m はともに自然数とする。

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \times (a^n) \times \cdots \times (a^n)}_{m\text{ 個}} \tag{71}$$

$$= \underbrace{\overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{n\text{ 個}} \times (a \times a \times \cdots \times a) \times \cdots (a \times a \times \cdots \times a)}_{m\text{ 個}} \tag{72}$$

$$= \underbrace{a \times a \times \cdots a \times a \times a \times \cdots a \times \cdots \times a \times a \times \cdots a}_{n \times m\text{ 個}} \tag{73}$$

$$= a^{nm} \tag{74}$$

1.4.7 冪数の有理数への拡張

$a > 0$ とし、 n は自然数とする。a の $\dfrac{1}{n}$ 乗を n 乗した値を考えると冪乗の冪乗により

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}n} = a^1 = a \tag{75}$$

とあらわすことができる。そこで、$a^{\frac{1}{n}}$ を n 乗したら a になる数、すなわち a の n 乗根と定義する。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{76}$$

1.5 二項定理

1.5.1 順列の場合の数

n 個の異なった文字

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \tag{77}$$

から r 個とってきて並べる事を考える。このとき異なった並べ方の個数を調べる。

最初の一個はどれでもいいので選び方は n 個ある。

2 番目は残りの $(n-1)$ のうちのいずれかなので、最初の n 個に対してそれぞれ $(n-1)$ 個ある。

したがって最初と 2 つ目の文字を選ぶ選び方の個数は $n(n-1)$ 個である。

これを r 個まで繰り返すと

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{78}$$

である。

いくつかのものを 1 列に並べた配列を順列とよぶ。n 個の異なった文字の中から r 個を選んで並べるとき、異なる並べ方の総数を

$$ {}_nP_r \tag{79} $$

という記号であらわす[3)]。

特に

$$ {}_nP_n = n(n-1)\cdots(2)(1) \tag{80} $$

のとき、この値を『n の階乗』とよび $n!$ であらわす。

定義

$n = 0$ のとき

$$ 0! = 1 \tag{81} $$

と定義する。

3) Permutation 由来

階乗の記号を使うと ${}_nP_r$ は以下のようにあらわされる。

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= (n)(n-1)\cdots(n-r+1) && (82)\\
&= (n)(n-1)\cdots(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!} && (83)\\
&= \frac{(n)(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots(2)(1)}{(n-r)!} && (84)\\
&= \frac{n!}{(n-r)!} && (85)
\end{aligned}
$$

1.5.2 組合せの場合の数

n 個から r 個を選び出す選び方を組合せと呼び、異なる組合せの総数を

$$ {}_nC_r \tag{86} $$

という記号であらわす[4)]。

n 個から r 個を選んで並べる順列の場合の数は ${}_nP_r$ である。

n 個から r 個を選ぶ組合せの場合の数は ${}_nC_r$ である。

4) Combination 由来

n 個から r 個を選ぶ組合せにはそれぞれ r 個の成分があり、それらを並べる順列の場合の数は ${}_rP_r = r!$ 個ある。

したがって以下の関係が成り立つ

$$ {}_nP_r = {}_nC_r \times {}_rP_r \tag{87} $$

$$ \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nC_r \times r! \tag{88} $$

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} \tag{89} $$

$r = 0$ のとき

定義

「なにも並べない」という一通りがあると考え

$$ {}_nC_0 = 1 \tag{90} $$

と定義する。

$r = 1$ のとき

$$ {}_nC_1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n \tag{91} $$

である。

1.5.3 二項定理

$(a+b)^n$ を展開することを考える。これを求めるには

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b) \tag{92}$$

の右辺を展開すればよい。すると右辺にある n 個の因数 $(a+b)$ からそれぞれ a または b を選んで掛け合わせた

$$a^{n-r}b^r \quad ;\ r = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{93}$$

という項の和が得られる。

それぞれの $a^{n-r}b^r$ は n 個の因数 $(a+b)$ のうち、r 個は b をとり、$n-r$ 個は a をとって掛け合わせたものである。したがって、そのような積は n 個の因数から b の方を r 個選ぶ選び方の総数だけあり、その数は n 個から r 個を選ぶ組合せの数 ${}_nC_r$ である。つまり $a^{n-r}b^r$ を因数として持つ項の係数は ${}_nC_r$ である。この

$$ {}_nC_r \ a^{n-r}b^r \tag{94}$$

を $r = 0, 1, 2, \cdots, n$ について加えたものが求めている $(a+b)^n$ である。

定理 IV−1 − 3(二項定理)

$(a+b)^n$ を展開すると以下の展開式を得る。

$$(a+b)^n = {}_nC_0\ a^n b^0 + {}_nC_1\ a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\ a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-2}\ a^2 b^{n-2} + {}_nC_{n-1}\ a^1 b^{n-1} + {}_nC_n\ a^0 b^n \tag{95}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\ a^{n-r}b^r \tag{96}$$

1.6 等比数列

初項 a、公比 r、項数 n とする。a_0 を初項とし、n 番目の項 a_{n-1} とあらわし以下のように定義する。

$$a_{n-1} = ar^{n-1} \tag{97}$$

これによって定義される数列を等比数列と呼び $\{a_n\}$ とあらわす。

$$\{a_n\} = \{a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}\} \tag{98}$$

1.6.1 等比数列の和

ここで $r \neq 1$ として、初項から n 項までの総和を考える。初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和を S_n とおくと、

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \tag{99}$$

両辺を r 倍し、

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \tag{100}$$

(99) 式から (100) 式の両辺をそれぞれ引くと

$$S_n - rS_n = a - ar^n \tag{101}$$

左辺を括弧でくくり共通因子を掃き出すと

$$S_n\,(1-r) = a\,(1-r^n) \tag{102}$$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} \tag{103}$$

定理 IV−1 − 4 (等比数列の和)

初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和を S_n とおくと、等比数列の和は

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} \tag{103}$$

である。ただし $r \neq 1$ とする。

1.7　ネイピア数 e

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ とおいて数列 $\{a_n\}$ を考える。

まず、$a_n < a_{n+1}$ を示す。これを示すために a_n, a_{n+1} を二項定理で展開する。

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \left(\frac{1}{n}\right)^r \tag{104}$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} {}_{n+1}C_r \left(\frac{1}{n+1}\right)^r \tag{105}$$

これら二つの展開式の対応する項の大きさを比べてみる。

1 番目の項 ($r = 0$ の場合)

$$ {}_nC_0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 = 1 \tag{106} $$

$$ {}_{n+1}C_0 \left(\frac{1}{n+1}\right)^0 = 1 \tag{107} $$

2 番目の項 ($r = 1$ の場合)

$$ {}_nC_1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 = n\frac{1}{n} = 1 \tag{108} $$

$$ {}_{n+1}C_1 \left(\frac{1}{n+1}\right)^1 = (n+1)\frac{1}{n+1} = 1 \tag{109} $$

3 番目以降の項は

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r \left(\frac{1}{n}\right)^r &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\frac{1}{n^r} && (110)\\
&= \frac{1}{r!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-r+1}{n}\right) && (111)\\
&= \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) && (112)\\
{}_{n+1}C_r \left(\frac{1}{n+1}\right)^r &= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r+2)}{r!}\frac{1}{(n+1)^r} && (113)\\
&= \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n+1}\right) && (114)
\end{aligned}
$$

これらの右辺の各因数を比較すると

$$\left(1-\frac{i}{n}\right)<\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\quad ;\ i=1,2,\cdots,r-1 \tag{115}$$

であるから、(112) 式右辺よりも (114) 式右辺の各因数の方が大きい。したがって 3 番目以降の項はそれぞれ

$${}_nC_r\left(\frac{1}{n}\right)^r<{}_{n+1}C_r\left(\frac{1}{n+1}\right)^r \tag{116}$$

である。こうして (104) 式右辺の各項よりも (105) 式右辺の対応する各項の方が大きく、しかも (105) 式の右辺には $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ という項が余分についている。

よって

$$\text{全ての } n \text{ に対して } a_n < a_{n+1} \tag{117}$$

となる。上記の議論により数列 $\{a_n\}$ は単調増加である。

続けて、数列 $\{a_n\}$ が上限を持つことを示す。$i = 1, 2, \cdots, r-1$ に対して

$$1 - \frac{i}{n} < 1 \tag{118}$$

であるから (104) 右辺の第 3 項以降の各項はあきらかに

$${}_nC_r \left(\frac{1}{n}\right)^r = \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!} \tag{119}$$

である。

すると

$$a_n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \left(\frac{1}{n}\right)^r < \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{120}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{121}$$

が成立する。

ここで $r = 2, 3, \cdots, n$ に対して

$$\frac{1}{r!} = \frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times r} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{r} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \tag{122}$$

である。

初項 $a = 1$、公比 $r = \dfrac{1}{2}$、項数 n である等比数列の和は

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{123}$$

である。等比数列の和 (103) よりその値は

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{(1)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{124}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \tag{125}$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{126}$$

したがって

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{127}$$

$$= 1 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 \tag{128}$$

すなわち

$$\text{すべての } n \text{ に対して } a_n < 3 \tag{129}$$

であることが分かる。3 は a_n の上界である。a_n は上界を持つから上限を持つ。

(117) と (129) から数列 $\{a_n\}$ は単調増加かつ上に有界であることが分かる。したがってこの数列は収束する。この極限をネイピア数と呼び e という文字であらわす。

定義

以下で定義される無理数を e であらわし、ネイピア数とよぶ。

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{130}$$

ネイピア数 e は底とすることが多い。そこで

$$\mathrm{e}^x = \exp(x) \tag{131}$$

とあらわす。

定理 IV−1 − 5

ネイピア数 e に対して

$$2 < \mathrm{e} < 3 \tag{132}$$

が成り立つ。

証明

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ とおき二項定理で展開すると

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \left(\frac{1}{n}\right)^r \tag{104}$$

である。

(104) 式最右辺第 1 項は、

$$ {}_nC_0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 = 1 \tag{106} $$

(104) 式最右辺第 2 項は、

$$ {}_nC_1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 = n\frac{1}{n} = 1 \tag{108} $$

(104) 式最右辺第 3 項以降は、

$$ {}_nC_r \left(\frac{1}{n}\right)^r > 0 \tag{133} $$

なので、

$$ a_n = 1 + 1 + \sum_{r=2}^{n} {}_nC_r \left(\frac{1}{n}\right)^r > 2 \tag{134} $$

である。
ここで $n \to \infty$ とすると $a_n \to \mathrm{e}$ なので、

$$ \mathrm{e} > 2 \tag{135} $$

である。また、(129) により

$$ \mathrm{e} < 3 \tag{136} $$

が成り立つので (132) が成り立つ。(終)

ここでは証明していないが[5)]、ネイピア数 e は

$$\begin{aligned} e = 2.&7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 4709369995 \\ &9574966967\ 6277240766\ 3035354759\ 4571382178\ 5251664274 \\ &2746639193\ 2003059921\ 8174135966\ 2904357290\ 0334295260 \\ &5956307381\ 3232862794\ 3490763233\ 8298807531\ 9525101901\cdots \end{aligned}$$

と続く無理数である。

5)　関連資料にネイピア数 e が無理数である証明を示してある。

1.8 冪数の無理数への拡張

e の小数点以下の値を一桁足していった数列 r_i を考える。

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 2.7 \\
r_2 &= 2.71 \\
r_3 &= 2.718 \\
r_4 &= 2.7182 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

1.8.1 r_l と r_{l+1}

l 番目の数字を m、$l+1$ 番目の数字を $n \neq 0$ とすると

$$r_l \quad = 2.71828 \ \cdots \ m \ = \frac{271828 \cdots m}{10^l} \quad = \frac{271828 \cdots m0}{10^{l+1}} \tag{137}$$

$$r_{l+1} = 2.71828 \ \cdots mn = \frac{271828 \cdots mn}{10^{l+1}} \tag{138}$$

1.8.2 $\exp(r_l)$

e を底とし、r_l を冪数として用いると

$$\mathrm{e}^{r_l} = \exp\left(\frac{271828\cdots m0}{10^{l+1}}\right) \tag{139}$$

$$= \exp\left(271828\cdots m0 \times \frac{1}{10^{l+1}}\right) \tag{140}$$

$$= \left(\exp(271828\cdots m0)\right)^{\frac{1}{10^{l+1}}} \tag{141}$$

1.8.3 $\exp(r_{l+1})$

同様に r_{l+1} を冪数として用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{r_{l+1}} &= \exp\left(\frac{271828\cdots mn}{10^{l+1}}\right) && (142)\\
&= \left(\exp\left(271828\cdots mn\right)\right)^{\frac{1}{10^{l+1}}} && (143)\\
&= \left(\exp\left(271828\cdots m0+n\right)\right)^{\frac{1}{10^{l+1}}} && (144)\\
&= \left(\exp(271828\cdots m0)\times\exp(n)\right)^{\frac{1}{10^{l+1}}} && (145)\\
&= \left(\exp\left(271828\cdots m0\right)\right)^{\frac{1}{10^{l+1}}}\times\left(\exp\left(n\right)\right)^{\frac{1}{10^{l+1}}} && (146)\\
&= \mathrm{e}^{r_l}\times\sqrt[10^{l+1}]{\exp(n)} && (147)
\end{aligned}$$

1.8.4 $\exp(r_l)$ と $\exp(r_{l+1})$ の大小関係

$n \neq 0$ なので、n は一桁の自然数である。そして $\mathrm{e} > 1$ だから $\exp(n) > 1$ である。したがって、

$$\sqrt[10^{l+1}]{\exp(n)} > 1 \tag{148}$$

である。(147) 式第二因数が 1 より大きいので、

$$\mathrm{e}^{r_l} < \mathrm{e}^{r_{l+1}} \tag{149}$$

である。したがって $\exp(r_i)$ は単調増加である。

1.8.5 e^e の上界

r_i と e を比較すると、

$$r_i < \mathrm{e} \tag{150}$$

なので i が大きくなればなるほど r_i は大きくなるが e を超えないことを意味する。また、$1 < \mathrm{e} < 3$ なので、

$$\mathrm{e}^{r_i} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^3 \tag{151}$$

であり、e^3 は e^{e} の上界である。 e^{e} は上界を持つから上限を持つ。

したがって、e^{e} は、単調増加であって上限を持つので収束する。

1.9 指数法則

$a > 0$ とし、n, m は任意の実数とする。以下の法則を『指数法則』という。

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \tag{152}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{153}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{154}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{155}$$

$$a^0 = 1 \tag{156}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{157}$$

問題 IV−1 − 2

次の式において以下の問いに答えなさい。

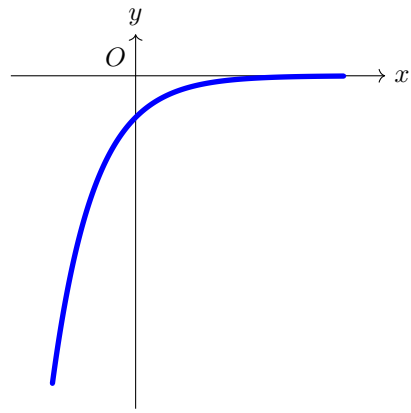
$$y = -\exp(-x)$$

- e を使ってあらわしなさい。
- 定義域を $(-\infty, +\infty)$ とする。値域の範囲を答えなさい。
- グラフであらわしなさい。なおグラフ作成に際しては何らかのソフトウェアを利用するものとする。

解例 IV−1 − 2

$$
\begin{aligned}
y &= -\exp(-x) \\
&= -\mathrm{e}^{-x} && \text{(a)} \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}^{x}} && \text{(b)}
\end{aligned}
$$

値域は $(-\infty, 0)$



問題 IV−1 − 3

次の式において以下の問いに答えなさい。

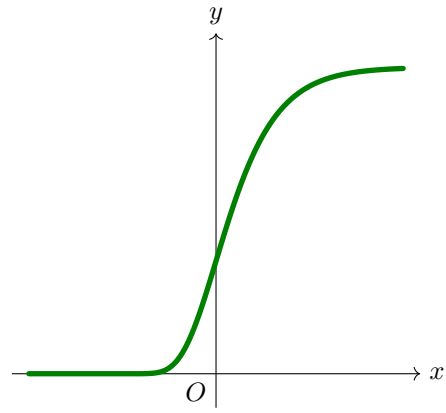
$$y = \exp(-\exp(-x))$$

- e を使ってあらわしなさい。
- 定義域を $(-\infty, +\infty)$ とする。値域の範囲を答えなさい。
- グラフであらわしなさい。なおグラフ作成に際しては何らかのソフトウェアを利用するものとする。

解例 IV−1 − 3

$$
\begin{aligned}
y &= \exp(-\exp(-x)) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} && \text{(a)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}} && \text{(b)} \\
&= \frac{1}{\sqrt[\mathrm{e}^{x}]{\mathrm{e}}} && \text{(c)}
\end{aligned}
$$

値域は $(0, 1)$



問題 IV−1 − 4

次の式において以下の問いに答えなさい。

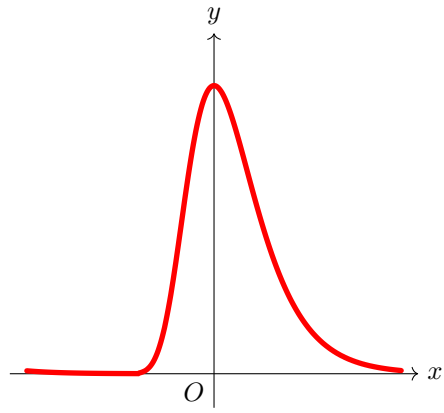
$$y = \exp(-x)\exp(-\exp(-x))$$

- e を使ってあらわしなさい。
- 定義域を $(-\infty, +\infty)$ とする。値域の範囲を答えなさい。
- グラフであらわしなさい。なおグラフ作成に際しては何らかのソフトウェアを利用するものとする。

解例 IV−1 − 4

$$
\begin{aligned}
y &= \exp(-x)\exp(-\exp(-x)) \\
&= \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} && \text{(a)} \\
&= \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}} && \text{(b)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}} && \text{(c)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}} && \text{(d)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{x+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}} && \text{(e)}
\end{aligned}
$$

値域は $\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$



問題 IV−1 − 5

次の式において以下の問いに答えなさい。

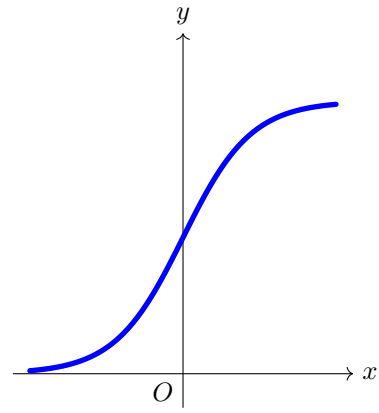
$$y = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

- e を使ってあらわしなさい。
- 定義域を $(-\infty, +\infty)$ とする。値域の範囲を答えなさい。
- グラフであらわしなさい。なおグラフ作成に際しては何らかのソフトウェアを利用するものとする。

解例 IV$-1-5$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{1+\exp(-x)} \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} && \text{(a)} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}} && \text{(b)}
\end{aligned}
$$

値域は $(0,1)$



1.10 まとめ

- a を n 回かけることを冪乗といい、このときの n を冪数という。
- 底が正であれば冪数は全ての実数で指数法則を満たす。
- $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ をネイピア数 e という。
- ネイピア数 e は、 $\mathrm{e} = 2.71828\ 18284\ 59041\cdots$ と続く無理数である。
- ネイピア数 e の冪乗を

$$\mathrm{e}^n = \exp(n)$$

とあらわす。