第 III 部　数学的補題

目次

1　命題と証明

1.1　はじめに

- 数学を用いた説明は冷徹です。
- 正しいか正しくないかを常に客観的に示します。
- 時として、思いもよらない結論にたどり着くことがあります。
- 数学の思考が論理的だからです。
- そこには、論者の意見や主観的判断は一切入りません。

1.1.1　ポイント

- 命題
- 対偶
- 集合
- 背理法

1.1.2 準備

定義

1 とそれに 1 ずつ加えて得られる自然数 $(1, 2, 3, 4, \cdots)$ 、これらに － 1 を乗じて得られる負数 (－ 1, － 2, － 3, － 4, $\cdots$) 、および 0 の総称を『整数』という。

定義から直ちに以下の関係が成り立つ。

$$\text{整数} + \text{整数} = \text{整数} \tag{1}$$

$$\text{整数} \times \text{整数} = \text{整数} \tag{2}$$

定義

整数の比としてあらわすことのできる実数を『有理数』という。

分母分子ともに整数の分数 (分母 $\neq 0$) とも説明される。整数は分母が 1 の分数と考えることにより有理数の特別な場合となる。

自然数は $\mathbb{N}$ 、整数は $\mathbb{Z}$ 、 有理数は $\mathbb{Q}$、 実数は $\mathbb{R}$ を使ってあらわす。

1.2 命題とは

- 正しいか、正しくないかを数学的に判断できる文のことをいう。
- P を条件,Q を結論として

$$P \implies Q \tag{3}$$

  とあらわす。
- 命題が正しい場合、その命題は『真(しん)』であるといい、正しくない場合、その命題は『偽(ぎ)』であるという。
- 真の場合、正しいことを示さなくてはならない。
- 偽の場合、反例を上げることで偽であることが示される。

例題 III−1 − 1

有理数と有理数の和は有理数であることを証明しなさい。

解法 III−1 − 1

二つの有理数をそれぞれ p, q であらわす。p, q は有理数なので整数 a, b, c, d を使うと

$$p = \frac{a}{b} \tag{4}$$

$$q = \frac{c}{d} \tag{5}$$

とあらわすことができる。

ここで $p + q$ を考える。

$$p + q = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \tag{6}$$

$$= \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} \tag{7}$$

$$= \frac{ad + cb}{bd} \tag{8}$$

(8) 分子各項は整数同士の積なので整数である。よって分子は整数同士の和なので整数である。また分母は整数同士の積なので整数である。分母分子ともに整数なので、$p + q$ は有理数である。(終)

1.2.1　命題の否定

- 文章の内容を打ち消すことを『否定』という。
- P の否定を P^C とあらわし、Q の否定を Q^C とあらわす。

命題と否定 1

I　実数 x が無理数であるとき、$2x+1$ が無理数である。

II　実数 x が無理数であるとき、$2x+1$ は無理数でない。

命題と否定 2

I　$\sqrt{2}$ は無理数である。

II　$\sqrt{2}$ は無理数でない。

命題と命題の否定の関係

I と II のうちどちらかは真であり、どちらかは偽である。

1.3 集合

- 『集合』とは「ものの集まり」である[1)]。
- 集合を構成している個々のものを『元（げん）』という[2)]。
- 集合をあらわすのに大文字のアルファベットを用い、集合の元をあらわすとき小文字のアルファベットを用いるのが慣習である。

1) 『もの』がなんであるかは問わない。
2) 『要素』ともいう。

1.3.1 集合の元

a が集合 A の元であることを

$$a \in A \tag{9}$$

とあらわし、「a は A に属する」あるいは「a は A に含まれる」という。a が A の元でないことを

$$a \notin A \tag{10}$$

とあらわし、「a は A に属さない」あるいは「a は A に含まれない」という。

元の個数が有限個である集合を『有限集合』といい、無限個の元からなる集合を『無限集合』という。

1.3.2 集合の表記法

集合をあらわすとき集合の元を明示する方法も用いられる。1 から 6 までの自然数の有限集合であることを

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{11}$$

とあらわす。この記法で、1 から 100 までの自然数の集合をあらわすときは、

$$\{1, 2, 3, \cdots, 98, 99, 100\} \tag{12}$$

とかく。

全ての自然数の集合は、

$$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\} \tag{13}$$

とかく。

この記法では実数全体の集合をあらわすことはできない。

1.3.3　条件を明示した集合の表記法

集合を規定する条件が与えられていて、その条件を満たす元の集まりで集合を規定している場合、元 x の満たすべき条件 $P(x)$ を明示して、条件 $P(x)$ を満たす x の集合を

$$\{x \mid P(x)\} \tag{14}$$

とあらわす。

この記法において、$P(x)$ は式の形で与えてもいいし、言葉で述べてもよい。また条件はいくつあってもよい。

この記法によれば、(11) は

$$\{x \mid 1 \leqq x \leqq 6,\ x \text{ は自然数}\} \tag{15}$$

とあらわすことができる。(13) は

$$\{x \mid x \text{ は自然数}\} \tag{16}$$

そして、実数全体の集合は

$$\{x \mid x \text{ は実数}\} \tag{17}$$

とあらわすことができる。

1.3.4 部分集合

二つの集合 A と B において、B の元は全て A の元になっているとき、すなわち

$$a \in B \implies a \in A \tag{18}$$

が成り立つとき『A は B を含む』または『B は A に含まれる』といい、

$$A \supset B \tag{19}$$

とあらわす[3)]。

3) 左右を逆転して $B \subset A$ ともかく。

このとき B は A の『部分集合』であるという。

$A \subset B$ かつ $A \supset B$ であるとき

$$A = B \tag{20}$$

とあらわし、A と B は『等しい』という。

A と B が『等しくない』とき

$$A \neq B \tag{21}$$

とあらわす。

1.3.5　全体集合と空集合

数学で集合を扱う場合、それらの集合を部分集合としてもつ１つの大きな集合を背後に考えている。その大きな集合を『全体集合』といい

$$\Omega \tag{22}$$

であらわす。

「元を持たない集合」を集合の仲間に入れ『空集合(くうしゅうごう)』といい、

$$\varnothing \tag{23}$$

であらわす。

空集合 $\varnothing$ はどんな集合の部分集合にもなっていると考える。すなわち

$$\varnothing \subset A \tag{24}$$

である。

1.3.6　和集合

　集合 A と集合 B が与えられたとき、A の元と B の元の全てからなる集合を A と B の『和集合』といい

$$A \cup B \tag{25}$$

とあらわす。

和集合について次の関係式が成立する。

$$A \cup A = A \tag{26}$$

$$A \cup B = B \cup A \tag{27}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ &= A \cup B \cup C \end{aligned} \tag{28}$$

1.3.7　共通部分

　集合 A と集合 B が与えられたとき、A と B のどちらにも含まれている元の集合を A と B の『共通部分』といい

$$A \cap B \tag{29}$$

とあらわす。

共通部分について次の関係式が成立する。

$$A \cap A = A \tag{30}$$

$$A \cap B = B \cap A \tag{31}$$

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ &= A \cap B \cap C \end{aligned} \tag{32}$$

1.3.8 補集合

集合 A が、全体集合 Ω の部分集合

$$A \subset \Omega \tag{33}$$

とする。

A に属さない Ω の元の集合を A の『補集合』といい A^C であらわす[4)]。

$$A^C = \{x | x \notin A,\ x \in \Omega\} \tag{34}$$

4) Complement: 補足・補完

集合 A と A^C の間には以下の関係が成り立つ。

$$A \cup A^C = \Omega \tag{35}$$

$$A \cap A^C = \varnothing \tag{36}$$

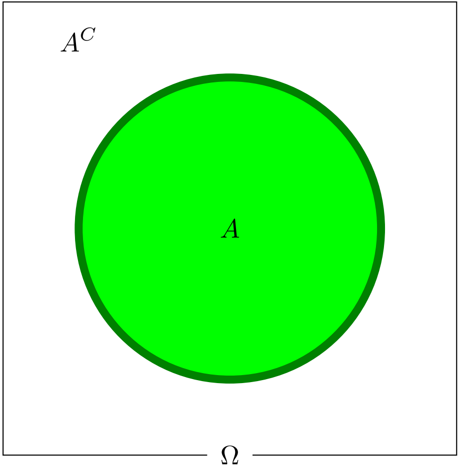
(35) の証明

$$
\begin{aligned}
x \in A & \implies x \notin A^C && (37) \\
A \cup A^C & \implies x \in A \quad or \quad x \notin A && (38) \\
& \implies \Omega && (39)
\end{aligned}
$$

(36) の証明

$$
\begin{aligned}
x \in A & \implies x \notin A^C && (40) \\
A \cap A^C & \implies x \in A \quad and \quad x \notin A && (41) \\
& \implies \varnothing && (42)
\end{aligned}
$$

図 1　集合 A と補集合と全体集合



補集合の定義から次の式が成り立つ。

$$\Omega^C = \varnothing \tag{43}$$

$$\varnothing^C = \Omega \tag{44}$$

$$\left(A^C\right)^C = A \tag{45}$$

$$A \supset B \quad \Longleftrightarrow \quad A^C \subset B^C \tag{46}$$

問題 III−1 − 1

$$A \supset B \iff A^C \subset B^C$$

が成り立つことを証明しなさい。

解例 III−1 − 1

$\boldsymbol{A \supset B \Longrightarrow A^C \subset B^C}$ の証明

$A \supset B$ なので

$$x \in B \quad \Longrightarrow \quad x \in A$$

ここで

$$\begin{aligned} x \in A^C \quad &\Longrightarrow \quad x \notin A \\ &\Longrightarrow \quad x \notin B \\ &\Longrightarrow \quad x \in B^C \\ &\Longrightarrow \quad A^C \subset B^C \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A \supset B \Longleftarrow A^C \subset B^C}$ の証明

$A^C \subset B^C$ なので

$$x \in A^C \quad \Longrightarrow \quad x \in B^C$$

ここで

$$\begin{aligned} x \in B \quad &\Longrightarrow \quad x \notin B^C \\ &\Longrightarrow \quad x \notin A^C \\ &\Longrightarrow \quad x \in A \\ &\Longrightarrow \quad A \supset B \end{aligned}$$

1.4　集合と命題

ある全体集合 Ω の中の x が満たすべき条件 Q を与えたとき、この条件を満たす x の集合は

$$\{x|\ Q\} \tag{47}$$

とあらわすことができる。

ここで、条件 P は Q よりも制約が強い条件であるとすると、条件 P を満たしている x は条件 Q を満たしている。これを記号であらわすと

$$P \quad \Longrightarrow \quad Q \tag{48}$$

である。条件 $P,\ Q$ を集合をつかって、

$$A = \{x|\ P\ \} \tag{49}$$

$$B = \{x|\ Q\ \} \tag{50}$$

とあらわすと

$$A \subset B \tag{51}$$

である。

1.4.1　命題と対偶

命題を

$$P \quad\Longrightarrow\quad Q \tag{3}$$

とすると、

$$Q^C \quad\Longrightarrow\quad P^C \tag{52}$$

を『対偶(たいぐう)』という。

例題 $\mathrm{III}\boldsymbol{-1-2}$

次の命題の待遇を示せ。

$$n^2+1\text{ は奇数} \quad\Longrightarrow\quad n\text{ は偶数} \tag{53}$$

解法 $\mathrm{III}\boldsymbol{-1-2}$

(53) の対偶は

$$n\text{ は奇数} \quad\Longrightarrow\quad n^2+1\text{ 偶数} \tag{54}$$

である。

ここで条件 $P,\ Q$ の否定の集合を考え、

$$A^C = \{x|\ P^C\} \tag{55}$$

$$B^C = \{x|\ Q^C\} \tag{56}$$

とあらわす。

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B \tag{57}$$

$$\Longleftrightarrow \quad A^C \supset B^C \tag{58}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(Q^C \Longrightarrow P^C\right) \tag{59}$$

よって、命題

$$P \Longrightarrow Q \tag{3}$$

と対偶

$$Q^C \Longrightarrow P^C \tag{52}$$

の真偽は一致する。

命題が真であることを示す場合、対偶が真であることを示せばよい。

この証明法を『対偶法』という。

図 2　$P \subset Q$

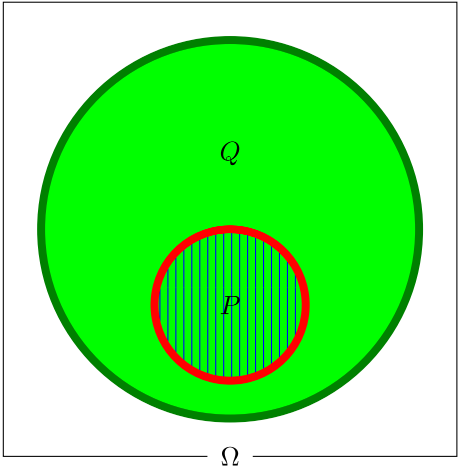
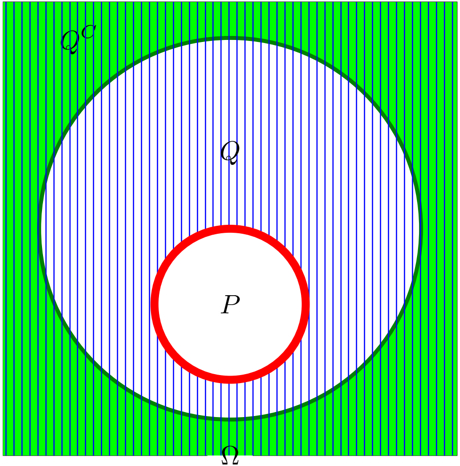


図 3　$Q^C \subset P^C$



例題 III–1 – 3

n は整数とする。次の命題の真偽を述べよ。

$$n^2+1 \text{ は奇数} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ は偶数} \tag{53}$$

解法 III–1 – 3

(53) の対偶は

$$n \text{ は奇数} \quad \Longrightarrow \quad n^2+1 \text{ は偶数} \tag{54}$$

である。

(54) によれば、n は奇数なので任意の整数 k を使い $2k+1$ とおくことができる。

$$n^2+1 = (2k+1)^2+1 \tag{60}$$
$$= 4k^2+4k+1+1 \tag{61}$$
$$= 4k^2+4k+2 \tag{62}$$

なので、対偶は真である。よって命題 (54) は真である。

1.5　背理法

背理法とは、「ある命題が正しいことを論証するために、その命題が正しくないと仮定して、その仮定から矛盾が導かれることを示し、それによって、元の命題が正しいことを証明する」証明法である。

「『P である』または『P ではない』」という命題は常に成り立つという論理学における排中律が背理法の根拠である。排中律を別の表現であらわすならば、

- 『P である』か『P ではない』のどちらか一方は必ず成立する。
- 第三の命題は存在しない。

などがあげられる。

例題 III–1 − 4

実数 x が無理数であるとき、$2x+1$ が無理数であることを証明しなさい。

解法 III–1 − 4

$2x+1$ が有理数であると仮定する（背理法の仮定)。

　このとき、$2x+1$ は有理数であるから、

　r を有理数として、

$$2x+1=r \tag{63}$$

$$2x=r-1 \tag{64}$$

$$x=\frac{r-1}{2} \tag{65}$$

$r-1$ は有理数だから、(65) 右辺も有理数である。よって、(65) から x は有理数となり、x が無理数であることに矛盾する。

　よって $2x+1$ は無理数である。(終)

例題 III**–1 – 5**

$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明しなさい。

解法 III**–1 – 5**

$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定する（背理法の仮定)。

仮定により $\sqrt{2}$ は有理数なので、互に素な自然数 $p,\ q$ を使い

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{66}$$

$$q\sqrt{2} = p \tag{67}$$

両辺を二乗すると

$$2q^2 = p^2 \tag{68}$$

である。(68) 左辺は偶数なので右辺も偶数である。p^2 が偶数ということは、p は偶数である。p が偶数ならば p^2 は 4 の倍数である。右辺が 4 の倍数ならば左辺も 4 の倍数である。すると q は偶数でなくてはならない。これは p と q が互いに素であることに矛盾する。

よって、$\sqrt{2}$ は無理数である。(終)

問題 III−1 − 2

$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明しなさい。

1.6　まとめ

- 主張したい文章を命題という。
- 命題は真か偽で判断される。
- 命題が真であることを証明するためには真であることを示さなくてはならない。
- 命題が真であることを証明するためには対偶が真であることを示せば足りる。
- 命題が偽であることを証明するためには反例を一つ示せば足りる。
- 命題の証明方法として背理法がある。
- 背理法は、命題を否定する仮定を立て矛盾を導き出す証明法である。

参考文献

- 『数学所の読みかた』竹山美宏「森北出版株式会社」2022 年 3 月 7 日第 1 版
- 『経済数学教室 1 巻』小山昭雄著　「岩波書店」1994 年 5 月 30 日
- 『新体系　大学数学　入門の教科書　上下』吉沢光雄著「講談社」