第 III 部　線型モデル

3　最もよく当てはまった直線の傾きと切片

ポイント

- 上界と下界
- 上限と下限
- 最小二乗解

3.1　はじめに

- 記号ばかりですが、そのおかげで、計算量は少なくて済みます。
- 記号を使って求めた答えはどこでも使えます。
- 万能の物差しです。

3.1.1　総和の公式

総和の定義[1)]より以下の公式は導かれる。

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \quad ;\ c \text{ は定数} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ;\ a \text{ は定数} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{3}$$

1)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

3.1.2　平均と総和

総和を n で割った値を平均といい $\bar{x}$ であらわす。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5}$$

問題 III–3 – 1

次の式を展開しなさい。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2$$

解例 III–3 – 1

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left({u_i}^2-2\bar{u}u_i+\bar{u}^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2-2\bar{u}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i+\frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\bar{u}^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2-2\bar{u}\bar{u}+\bar{u}^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2-2\bar{u}^2+\bar{u}^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2-\bar{u}^2
\end{aligned}
$$

問題 III–3 – 2

次の式を展開しなさい。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(v_i-\bar{v}\right)\left(w_i-\bar{w}\right)$$

解例 III–3 – 2

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i-\bar{v})(w_i-\bar{w}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_iw_i-\bar{w}v_i-\bar{v}w_i+\bar{v}\bar{w}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_iw_i-\bar{w}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i-\bar{v}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i+\frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\bar{v}\bar{w} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_iw_i-\bar{v}\bar{w}-\bar{v}\bar{w}+\bar{v}\bar{w} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_iw_i-\bar{v}\bar{w}
\end{aligned}
$$

3.2　最小二乗法

誤差の二乗和を最小化することによるモデルの当てはめを最小二乗法という。

3.2.1　最小二乗法の手順

1. 誤差の二乗和を求める。
2. 誤差の二乗和をパラメータで偏微分する。
3. 偏導関数を 0 とおいた連立方程式を解く。

求められた値を最小二乗解または最小二乗推定値という。

3.2.2 求めている直線

$$\hat{y}_i = \alpha + \beta x_i \tag{6}$$

3.2.3 誤差の定義

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \tag{7}$$

$$= y_i - \alpha - \beta x_i \tag{8}$$

3.2.4 誤差の二乗和

$$\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \tag{9}$$

$$= n\alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} y_i - 2\beta \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \tag{10}$$

3.3　微分と偏微分

導関数と微分の定義

関数 $y = f(x)$ において、x の変化量を h であらわし、h によってもたらされる $f(x)$ の変化量 $f(x+h) - f(x)$ と h の比をもとめる。ここで h が 0 になることなく、限りなく 0 に近づいた時、値をとるならばその関数を $\dfrac{dy}{dx}$ であらわし導関数という。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{11}$$

$f(x)$ から導関数を求めることを『微分する』といい、このときの $f(x)$ を『原始関数』とよぶ。導関数をあらわす記号として $f'(x),\ (f(x))'$ 等も使う。

3.3.1　微分の公式

導関数の定義より以下の公式を導き出すことができる。$f(x),\ g(x)$ は微分可能とする。

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \tag{12}$$

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \quad ;\alpha\text{は定数} \tag{13}$$

$$(f(x)\ g(x))' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x) \tag{14}$$

$$\left(x^2\right)' = 2x \tag{15}$$

$$(x)' = 1 \tag{16}$$

$$(c)' = 0 \quad ;c\ \text{は定数} \tag{17}$$

偏微分の定義

多変数関数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots x_m)$ において、$\Delta x_j \neq 0$ を x_j の変化量とする。Δx_j によってもたらされる y の変化量と Δx_j の比において Δx_j を 0 になることなく、限りなく 0 に近づけた時、値をとるならば、その関数を $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ であらわし、『x_j の偏導関数』という。

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_j + \Delta x_j, \cdots, x_m) - f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_m)}{\Delta x_j} \tag{18}$$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_m)$ から『x_j の偏導関数』を求めることを『x_j で偏微分する』という。

x_j で偏微分しているときは、それ以外の変数は変化しないので定数とみなし、一変量の微分と同様に計算する。

3.3.2　誤差の二乗和の偏微分

(10) を α および β で偏微分すると以下の偏導関数を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2n\alpha + 2\beta \sum_{i=1}^{n} x_i - 2 \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = 2\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + 2\beta \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{20}$$

3.4 上限と下限

$\mathbb{R}$ の切断

実数全体 $\mathbb{R}$ を次の条件を満たす部分集合 A と B に分割する。

i. $A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = \varnothing$

ii. $a \in A, \quad b \in B \Longrightarrow a < b$

i と ii を満たす A と B の組 (A, B) を「$\mathbb{R}$ の切断」という。

3.4.1 実数の公理

$\mathbb{R}$ の任意の切断 (A, B) に対して次の i または ii のどちらか一方だけが必ず成立する。

i. A に最大数があり、B に最小数がない。
ii. A に最大数がなく、B に最小数がある。

3.4.2 上界

$\mathbb{R}$ の部分集合 S をとる。このとき

$$\text{すべての } x \in S \text{ に対して } x \leqq M \tag{21}$$

を満たす実数 M があれば、この M を集合 S の「上界（じょうかい）」という。M より大きい数は全て S の上界である。

3.4.3 下界

$\mathbb{R}$ の部分集合 S をとる。このとき

$$\text{すべての } x \in S \text{ に対して } x \geqq m \tag{22}$$

を満たす実数 m があれば、この m を集合 S の「下界（かかい）」という。m より小さい数は全て S の下界である。

3.4.4　有界

S が上界を持つとき、S は「上に有界」であるといい、下界をもつとき「下に有界」であるという。上界と下界を共に持つとき、S は「有界」であるという。

3.4.5　上限と下限

集合 S が有界のとき、S の最小の上界を S の「上限（じょうげん）」といい、最大の下界を S の「下限（かげん）」という。

定理 III–3 − 1

集合 S が上に有界であれば S は上限を持つ。S が下に有界であれば S は下限を持つ。

証明 III–3 − 1

S が上に有界であるとする。このとき $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B を

$$A = \{S \text{ の上界では無い数全体}\}, \quad B = \{S \text{ の上界の全体}\} \tag{23}$$

によって定義すれば (A, B) は $\mathbb{R}$ の切断になっている。

したがって実数の公理により、A が最大数を持つか、さもなければ B が最小数を持つ。

ここで、A が最大数を持つとし、それを α とすれば、$\alpha \in A$ だから A の定義により α は S の上界ではない。

S は仮定により上に有界なので、上界を持つ。ここで、S に属する S の上界を s とする。

s は S の上界だから、任意の $x \in A$ に対して、$x < s$ である。したがって、 $\alpha < s$ である。

そこで、 $\beta = \dfrac{1}{2}(\alpha + s)$ とおけば、$\alpha < \beta < s$ であるが、$\beta < s$ なので、β は S の上界ではない。したがって、$\beta \in A$ でなくてはならない。

ところが α は A の最大数であったから、 $\alpha < \beta,\quad \beta \in A$ となる β が存在することは矛盾である。

A に最大数があるとすれば矛盾が生ずるから A には最大数が無い。A には最大数が無いのだから、実数の公理により、B に最小数がある。すなわち、上限がある。

同様に、S が下に有界であれば、下界の集合は最大数をもつので、集合 S は「下限」をもつ。(終)

3.4.6 上限と下限をあらわす記号

集合 S の上限を

$$\sup S \quad \text{あるいは} \quad \sup_{x \in S} x \tag{24}$$

とあらわし[2)]、下限を

$$\inf S \quad \text{あるいは} \quad \inf_{x \in S} x \tag{25}$$

であらわす[3)]。

2) 英語の supremum 由来
3) 英語の infimum 由来

3.5 最小二乗解

3.5.1 誤差の二乗和の下限

- 『誤差の二乗』は非負なので『誤差の二乗和』もまた非負となる。
- 負の値はすべて『誤差の二乗和』の下界である。
- 下界を持つので、下に有界である。
- 下に有界なので、下限をもつ。
- 2 変数二次関数は最大値を持つ場合、最小値を持つ場合、どちらも持たない場合があるが、『誤差の二乗和』は下限を持つので極値を与える点が『誤差の二乗和』を最小とする点である。

3.5.2 偏導関数を 0 と置いた連立方程式

最小二乗解を求めるには、偏導関数をそれぞれ 0 とおいた連立方程式を解けばよい。

$$
\begin{cases}
n\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 & (26) \\
\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 & (27)
\end{cases}
$$

問題 III–3 – 3

以下の連立方程式を解け。ただしパラメータは α, β とする。

$$\begin{cases} n\alpha + \beta \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ \alpha \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \end{cases}$$

解例 III–3 – 3

説明のために両式に数式番号を振る。

$$n\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \tag{a}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \tag{b}$$

加減法の解例

加減法で解くために、(a) 式左辺第 1 項を (b) 式左辺第 1 項と揃える。

(a) **の変形**

左辺第三項を右辺へ移項する。

$$n\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

両辺に $\sum_{i=1}^{n} x_i$ を掛ける。

$$n\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{c}$$

(b) の変形

左辺第三項を右辺へ移項する。

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

両辺に n を掛ける。

$$n\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i+n\beta\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \qquad \text{(d)}$$

(d) 式 と (c) 式の差を求め、左辺第一項の α に関する項を打ち消す。

(d)−(c)

$$
\begin{array}{rcccl}
n\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i & + & n\beta \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 & = & n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
n\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i & + & \beta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 & = & \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \\
-) & & & & \\
\hline
 & & n\beta \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \beta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 & = & n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i
\end{array}
$$

(d) **式** と (c) **式の差**

$$
\begin{aligned}
n\beta\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\beta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 &= n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i \\
\beta\left(n\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right) &= n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i \\
\beta=\frac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}
\end{aligned}
$$

代入法の解例

(a) 式を β に関して解く。

$$n\alpha + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \tag{a}$$

左辺第一項、第三項を右辺へ移項する。

$$\beta\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - n\alpha$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ を払う。

$$\beta = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n\alpha}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{e}$$

(e) 式を (b) 式に代入する。

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \right) \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

左辺第二項の括弧を外す。

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n\alpha \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

左辺第一項, 第三項を右辺へ移項する。

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{\displaystyle n\alpha \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i$$

両辺に $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ を掛ける。

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i = n\alpha \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

右辺を括弧でくくり α を掃きだす。

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha \left(n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right)$$

右辺第二因数を払い、左右を入れ替えてあらわす。

$$\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{\displaystyle n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

3.5.3 最小二乗解

『誤差の二乗和』の偏導関数をそれぞれ 0 と置いた連立方程式の解を、$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ であらわし、『最小二乗解』または『最小二乗推定値』とよぶ。

ここで、

$$n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1} n x_i\right)^2 \neq 0$$

とすると

最小二乗推定値は、

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{28}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{29}$$

であらわされる。

3.5.4　分散と共分散を使った最小二乗推定値の表現

x の分散と x, y の共分散をあらわすと

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \bar{x}^2 \tag{30}$$

$$Cov_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \tag{31}$$

である。

ここで V_x で Cov_{xy} を割ると

$$\frac{Cov_{xy}}{V_x} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2} \tag{32}$$

$$= \frac{n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2\right)} \tag{33}$$

$$= \frac{\left(n^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n^2\bar{x}\bar{y}\right)}{\left(n^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n^2\bar{x}^2\right)} \tag{34}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (n\bar{x})(n\bar{y})}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - (n\bar{x})^2} \tag{35}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \hat{\beta} \tag{36}$$

(26) に $\hat{\beta}$ を代入すると

$$n\alpha + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \tag{37}$$

$$n\alpha = \sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{38}$$

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{39}$$

$$\alpha = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \tag{40}$$

従って

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \tag{41}$$

$$\hat{\beta} = \frac{Cov_{xy}}{V_x} \tag{42}$$

である。

ここで最小二乗推定値が得られるためには

$$V_x \neq 0 \tag{43}$$

でなくてはならない。

例題 III–3 − 1

表 1 の値を使い最小二乗解を求めなさい。

$$\hat{\alpha} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

表 1　数値例 1

i	x_i	y_i
1	10	0.02
2	11	0.08
3	12	0.27
4	13	0.62
5	14	0.88
6	15	0.97
7	16	0.99

表 2　数値例 1-1

i	x_i	y_i	${x_i}^2$	$x_i y_i$
1	10	0.02	100	0.20
2	11	0.08	121	0.88
3	12	0.27	144	3.24
4	13	0.62	169	8.06
5	14	0.88	196	12.32
6	15	0.97	225	14.55
7	16	0.99	256	15.84
合計	91	3.83	$1,211$	55.09

解法

手計算をしていますが表計算ソフトや統計処理ソフトを使っても全く趣旨は変わりません。お好きな方法で解を得てください。

$$\hat{\alpha} = \frac{(1,211)(3.83) - (55.09)(91)}{(7)(1,211) - (91)^2}$$

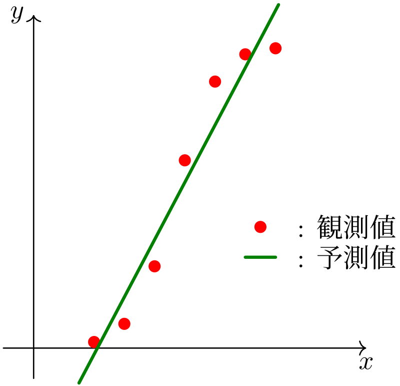
$$= -1.91357\cdots$$

$$\hat{\beta} = \frac{(7)(55.09) - (91)(3.83)}{(7)(1,211) - (91)^2}$$

$$= 0.18928\cdots$$

$$\hat{y}_i = -1.91357 + 0.18928\ x_i$$

図 1　観測値と予測値



問題 III–3 – 4

ある小学校の児童から以下のデータを得た。x は身長で、y は 50m 走のタイムである。表の値を使い最小二乗推定値を求めなさい。アプリの使用は各自の判断に任せる。

i	x_i	y_i
1	116.5	11.6
2	122.6	10.7
3	128.5	10.0
4	133.5	9.7
5	138.6	9.4
6	145.0	9.0

i	x_i	y_i
7	116.2	11.8
8	121.7	10.9
9	127.6	10.4
10	133.3	10.0
11	140.4	9.6
12	146.7	9.3

解例 III–3 – 4

$$\hat{\alpha} = 20.98577$$

$$\hat{\beta} = -0.08240$$

$$\hat{y}_i = 20.98577 - 0.08240\ x_i$$

問題 III–3 – 5

　ある小学校の児童から以下のデータを得た。x は体重で、y は 50m 走のタイムである。表の値を使い最小二乗推定値を求めなさい。アプリの使用は各自の判断に任せる。

i	x_i	y_i
1	21.3	11.6
2	24.2	10.7
3	27.7	10.0
4	31.1	9.7
5	34.4	9.4
6	39.2	9.0

i	x_i	y_i
7	21.2	11.8
8	23.7	10.9
9	27.0	10.4
10	30.4	10.0
11	35.0	9.6
12	40.0	9.3

解例 III–3 – 5

$$\hat{\alpha} = 14.04194$$

$$\hat{\beta} = -0.12979$$

$$\hat{y}_i = 14.04194 - 0.12979\ x_i$$

問題 III–3 – 6

表の値を使って最小二乗推定値を求めなさい。アプリの使用は各自の判断に任せる。

i	x_1	y
1	1	12
2	1	16
3	1	22
4	1	27
5	2	19
6	2	23
7	2	28
8	2	35

i	x_1	y
9	3	27
10	3	32
11	3	34
12	3	41
13	4	33
14	4	39
15	4	42
16	4	47

解例 III–3 – 6

$$\hat{\alpha} = 12.250$$

$$\hat{\beta} = 7.025$$

$$\hat{y}_i = 12.250 + 7.025\ x_i$$

問題 III–3 – 7

表の値を使って最小二乗推定値を求めなさい。アプリの使用は各自の判断に任せる。

i	x_2	y
1	1	12
2	2	16
3	3	22
4	4	27
5	1	19
6	2	23
7	3	28
8	4	35

i	x_2	y
9	1	27
10	2	32
11	3	34
12	4	41
13	1	33
14	2	39
15	3	42
16	4	47

解例 III–3 – 7

$$\hat{\alpha} = 17.750$$

$$\hat{\beta} = 4.825$$

$$\hat{y}_i = 17.750 + 4.825\ x_i$$

3.6 まとめ

- $\sup S$ は上限、$\inf S$ は下限を意味する。
- 下界があれば下限があり、上界があれば上限がある。
- 誤差の二乗和を偏微分して 0 とおいた連立方程式の解が最小二乗解である。
- 線型モデル $y_i = \alpha + \beta x_i$ の最小二乗推定値は、$V_x \neq 0$ とすると、

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{Cov_{xy}}{V_x} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

- 実際の計算ではコンピュータを利用する。