第 II 部　統計

10　確率変数

ポイント

- 確率変数とは
- 期待値
- 確率変数の分散

10.1　はじめに

- ギャンブルがなんらかの法則に影響されることは早くから分かっていました。
- この法則は学問として発達しました。
- ギャンブルを極めようとする努力は相当に学問的でした。

10.2　確率変数とは

変数が取りうる各値に対して確率が与えられている変数を確率変数という。確率変数は大文字を使ってあらわす。

10.2.1　サイコロを使った例

事象を識別する添え字を i とし、それぞれの事象を x_i であらわし x_i の事象がおこる確率を p_i とあらわす。サイコロを振ると x_i のどれかが観測される。この観測値はそれぞれ一定の確率 p_i に従い出現する。サイコロを振って出た目を X とすると、$X = x_i$ には確率 p_i が対応する。従って X は確率変数である。

表 1　サイコロの目と確率

X	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

さらに、出現値に対して、賞金 (y_i) を対応させた場合、$Y = y_i$ も確率変数である。サイコロの目が 1 ならば 500 円、2 または 3 ならば、200 円、4 以上なら 100 円の賞金を設定した場合、賞金は確率変数である。

表 2　確率変数 Y

Y	500	200	100
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

10.2.2　二つのサイコロを同時に振って出た目の和も確率変数

青いサイコロの出た目を X_1 とし、赤いサイコロの出た目を X_2 とする。この X_1 と X_2 の和 $X = X_1 + X_2$ も確率変数である。ここでそれぞれのサイコロの目が等しく出るように作られていると仮定すると X と確率の対応は表 3 になる。確率変数とそれぞれの確率変数の出現確率を対応させたものを『確率分布』という。

表 3　2 つのサイコロの目の和の確率分布

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

10.2.3　離散型確率変数

$\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の中の値をとる確率変数 X を離散型確率変数といい、i 番目の X に対応する確率を

$$\Pr(X = x_i) = p_i \qquad ; i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

とあらわす。X の確率 p_i は以下の条件を満たす。

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \qquad ; i = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{3}$$

10.2.4　累積分布

確率変数 X を昇順に並べ、r 番目の値 (x_r) 以下である確率を『累積分布』という。 累積分布は、x_1 から x_r に対応する確率 p_1 から p_r を積み上げた値である。

表 4　2 つのサイコロの目の和の累積分布

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sum_{i=1}^{r} p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

10.3　期待値

確率変数の確率による加重平均を『期待値』といい $E(X)$ であらわす。期待値 $E(X)$ は確率変数 $X=x_i$ と、x_i に対応する確率 p_i の積の総和であり、

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{4}$$

と定義する。

表 5　2 つのサイコロの目の和の期待値

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
x_ip_i	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	7

$$E(X) = \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7 \tag{5}$$

10.4　期待値の演算

期待値に関して以下の関係が成り立つ

$$E(c) = c \qquad ;\ c\text{ は定数} \tag{6}$$

$$E(X + c) = E(X) + c \qquad ;\ c\text{ は定数} \tag{7}$$

$$E(aX) = a\ E(X) \qquad ;\ a\text{ は定数} \tag{8}$$

(6) の証明

$$E(c) = \sum_{i=1}^{n} c\, p_i \tag{9}$$
$$= c \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{10}$$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ なので

$$E(c) = c \tag{6}$$

(終)

(7) の証明

$$E(X+c) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + c) p_i \tag{11}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i p_i + c p_i) \tag{12}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} c p_i \tag{13}$$

第 1 項は (4)、第 2 項は (6) により

$$E(X+c) = E(X) + c \tag{7}$$

(終)

問題 II–10 – 1

以下の式が成り立つことを証明しなさい。

$$E(aX) = a\ E(X) \qquad ;\ a \text{ は定数}$$

解例 II−10 − 1

$$
\begin{aligned}
E(aX) &= \sum_{i=1}^{n} a x_i p_i \\
&= a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i
\end{aligned}
$$

(4) により

$$
E(aX) = aE(X) \tag{8}
$$

問題 II–10 – 2

X を確率変数とする。$\big(X - E(X)\big)$ の期待値を計算しなさい。

$$E\big(X - E(X)\big)$$

解例 II−10 − 2

$$
\begin{aligned}
E\big(X - E(X)\big) &= E(X) - E(X) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

10.5　期待値からの偏差

確率変数 X の期待値からの偏差 $(X - E(X))$ を考える。$X - E(X)$ が確率変数なので期待値を求めると

$$E(X - E(X)) = 0 \tag{14}$$

となってしまう。

この符号の問題を解決する為に $X - E(X)$ を二乗して期待値を取ると

$$
\begin{aligned}
E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i & (15)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left({x_i}^2 - 2E(X)x_i + E(X)^2\right) p_i & (16)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left({x_i}^2 p_i - 2E(X)x_i p_i + E(X)^2 p_i\right) & (17)\\
&= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i & (18)
\end{aligned}
$$

第一項において ${x_i}^2$ を確率変数とみると ${x_i}^2$ の期待値なので

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \tag{19}$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 \tag{20}$$

これを X の分散といい、$V(X)$ であらわす。また分散 $V(X)$ の正の平方根を X の標準偏差といい $D(X)$ であらわす。また分散を ${\sigma_x}^2$、標準偏差を σ_x であらわすことも多い[1)]。

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned} \tag{21}$$

1) σ はギリシャ文字シグマの小文字である。

問題 II–10 – 3

以下の式が成り立つことを証明しなさい。

$$V(c) = 0 \qquad ; \ c \text{ は定数}$$

解例 II−10 − 3

$$
\begin{aligned}
V(c) &= E\left((c - E(c))^2\right) \\
&= E\left((c - c)^2\right) \\
&= E\left(0\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

別解 II−10 − 3

$$
\begin{aligned}
V(c) &= \sum_{i=1}^{n} \big(c - E(c)\big)^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(c - c\big)^2 p_i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

問題 II–10 – 4

以下の式が成り立つことを証明しなさい。

$$V(X+c) = V(X) \qquad ;\ c\text{ は定数}$$

解例 II−10 − 4

$$V(X+c) = E\left(\left((X+c) - E(X+c)\right)^2\right)$$

(7) より

$$\begin{aligned} &= E\left(\left(X + \cancel{c} - E(X) - \cancel{c}\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= V(X) \end{aligned}$$

別解 II−10 − 4

$$
\begin{aligned}
V(X+c) &= \sum_{i=1}^{n} \big((x_i+c)-E(X+c)\big)^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big((x_i+c)-\big(E(X)+c\big)\Big)^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i+c-E(X)-c\big)^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i-E(X)\big)^2 p_i \\
&= V(X)
\end{aligned}
$$

問題 II−10 − 5

以下の式が成り立つことを証明しなさい。

$$V(aX) = a^2V(X) \qquad ;\ a \text{ は定数}$$

解例 II$-10-5$

$$
\begin{aligned}
V(aX) &= E\left(\left(aX - E(aX)\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(aX - aE(X)\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(aX - aE(X)\right)\left(aX - aE(X)\right)\right) \\
&= E\left(a^2\left(X - E(X)\right)^2\right) \\
&= a^2E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}
$$

10.6　分散の演算

確率変数の分散に関して以下の関係が成り立つ

$$V(c) = 0 \qquad ;\ c\text{ は定数} \tag{22}$$

$$V(X + c) = V(X) \qquad ;\ c\text{ は定数} \tag{23}$$

$$V(aX) = a^2 V(X) \qquad ;\ a\text{ は定数} \tag{24}$$

10.7 まとめ

- 取りうる値 x_i が確率によって決まる変数を確率変数 X という。
- 確率変数 x_i と p_i を $i=1$ から n まで対応させたものを確率分布という。
- $X \leqq x_r$ の確率を累積分布という。
- 確率変数 x_i の確率 p_i による加重平均を X の期待値 $E(X)$ という。
- 「『$X-E(X)$』の二乗」の期待値を分散 $V(X)$ といい、分散の正の平方根を標準偏差 $D(X)$ という。