第 II 部　統計

9　確率の公理

ポイント

- 3 つの確率の定義
- 事象の演算
- 独立な事象

9.1　はじめに

- 観測できる値は何らかの法則に従っています。
- その法則の一つに確率があります。
- そして確率と呼ぶには、条件を満たす必要があります。

9.2 標本空間と事象

- 観測されうる結果を『標本点』とよび ω_i であらわす。
- 標本点の全体の集合を『標本空間』とよび Ω であらわす。
- 標本空間の部分集合を『事象』とよぶ。
- 標本点を一つも含まないことも事象とみなし『空（くう）事象』とよび $\varnothing$ であらわす。
- 標本点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ からなる事象 A は、$\{\quad\}$ を使って、
  $A = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ とあらわす。
- ただ一つの標本点からなる事象を『根元（こんげん）事象』とよび、二つ以上の標本点を含む事象を『複合事象』とよぶ。

9.2.1 赤いサイコロと青いサイコロを投げた例

x を赤いサイコロの目とし y を青いサイコロの目とする。赤青 2 つのサイコロを投げた時の目を標本点として (x, y) であらわし標本空間 Ω とする。

$$
\begin{array}{llllllll}
\Omega = \{ & (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), & \\
 & (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), & \\
 & (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), & \\
 & (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), & \\
 & (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), & \\
 & (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) & \}
\end{array}
$$

標本空間 Ω は、36 個の標本点からなる。

問題 II–9 – 1

x を赤いサイコロの目とし y を青いサイコロの目とする。赤青 2 つのサイコロを投げた時の目を標本点として (x, y) であらわし標本空間 Ω とする。
次の事象を標本点を使ってあらわしなさい。

(1)　$x + y$ が奇数である事象 A

(2)　$x + y$ が 3 の倍数である事象 B

(3)　$x + y$ が 5 の倍数である事象 C

(4)　$x + y = 7$ である事象 D

(5)　$x - y \geqq 0$ である事象 E

解例 II–9 – 1

(1) $A = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),$
$(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$

(2) $B = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$

(3) $C = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(4,6),(5,5),(6,4)\}$

(4) $D = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

(5) $E = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),$
$(5,4),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

9.2.2 事象の演算

- 事象 A と 事象 B 二つの事象において A と B が共通の標本点を持たない場合 A と B は『排反(はいはん)事象』であるという。また、A と B が共通の標本点を持たないことを A と B は排反であるという。
- 事象 A と事象 B 二つの事象のうち少なくとも一つがおこる事象を A と B の『和(わ)事象』とよび $A \cup B$ であらわす。
- 事象 A と事象 B 二つの事象が同時に起こる事象を『積(せき)事象』とよび $A \cap B$ であらわす。
- 事象 A が起こらない事象を『補(ほ)事象』とよび A^C であらわす。

問題 II–9 – 2

標本空間ならびに各事象は問題 II–9 – 1 に準ずるものとする。
次の事象を標本点を使ってあらわしなさい。

(1)	E^C	(6)	$B \cap C$	(11)	$C \cup D$
(2)	$A \cup B$	(7)	$B \cap D$	(12)	$B \cup C \cup D$
(3)	$A \cap B$	(8)	$C \cap D$	(13)	$E \cup E^C$
(4)	$A \cap C$	(9)	$B \cup C$	(14)	$E \cap E^C$
(5)	$A \cap D$	(10)	$B \cup D$		

解例 II–9 – 2

(1) $E^C=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$

(2) $A\cup B=\{(1,2),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5),(6,6)\}$

(3) $A\cap B=\{(1,2),(2,1),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

(4) $A\cap C=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

(5) $A\cap D=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

(6) $B\cap C=\varnothing$

(7) $B\cap D=\varnothing$

(8)　$C \cap D = \varnothing$

(9)　$B \cup C = \{(1,2),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,6),(4,1),(4,2),(4,5),(4,6),(5,1),(5,4),(5,5),(6,3),(6,4),(6,6)\}$

(10)　$B \cup D = \{(1,2),(1,5),(1,6),(2,1),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,6),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,4),(6,1),(6,3),(6,6)\}$

(11)　$C \cup D = \{(1,4),(1,6),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(4,6),(5,2),(5,5),(6,1),(6,4)\}$

(12)　$B \cup C \cup D = \{(1,2),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,4),(5,5),(6,3),(6,1),(6,4),(6,6)\}$

(13)　$E \cup E^C = \Omega$

(14)　$E \cap E^C = \varnothing$

9.2.3　排反な事象

- X と Y が排反であって、X と Z が排反であって、Y と Z が排反であるとき X と Y と Z は『互いに排反』であるという。
- A と A^C の積事象は $\varnothing$ である。
- A と A^C は排反である。
- A と A^C の和事象は Ω である。

9.3 確率の定義

確率とは事象の起こりやすさを定量的に示すもの[1]であり、事象 A の起こる確率を $\Pr(A)$ であらわす。

ここでは 3 つの確率の定義を紹介する。

- ラプラスの定義
- 頻度による定義
- 確率の公理による定義

1) 可能性は可能か不可能かの二択であり、蓋然性（がいぜんせい）は確実性の度合いを意味し、確率とほぼ同じ意味を持つ。

9.3.1　ラプラスの定義

試行の根元事象が全部で N 個あり、それらが起こる起こりやすさは『同様に確からしい』とする。ある事象 A に含まれる根元事象が R 個のとき、事象 A の確率 $\Pr(A)$ を

$$\Pr(A) = \frac{R}{N} \tag{1}$$

で定義する。

R の最小値は 0 であり、最大値は N なので

$$0 \leqq \Pr(A) \leqq 1 \tag{2}$$

である。

問題 II–9 – 3

標本空間ならびに各事象は問題 II–9 – 1 に準ずるものとする。
次の事象の確率を求めなさい。ただし、各根元事象の起こりやすさは同様に確からしいとする。

(1)	$\Pr(A)$	(7)	$\Pr(A \cup B)$	(13)	$\Pr(C \cap D)$
(2)	$\Pr(B)$	(8)	$\Pr(A \cap B)$	(14)	$\Pr(B \cup C)$
(3)	$\Pr(C)$	(9)	$\Pr(A \cap C)$	(15)	$\Pr(B \cup D)$
(4)	$\Pr(D)$	(10)	$\Pr(A \cap D)$	(16)	$\Pr(C \cup D)$
(5)	$\Pr(E)$	(11)	$\Pr(B \cap C)$	(17)	$\Pr(B \cup C \cup D)$
(6)	$\Pr\left(E^C\right)$	(12)	$\Pr(B \cap D)$	(18)	$\Pr\left(E \cup E^C\right)$

解例 II–9 – 3

(1)　$\Pr(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

(2)　$\Pr(B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

(3)　$\Pr(C) = \dfrac{7}{36}$

(4)　$\Pr(D) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

(5)　$\Pr(E) = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$

(6)　$\Pr\left(E^C\right) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

(7)　$\Pr(A \cup B) = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$

(8)　$\Pr(A \cap B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

(9)　$\Pr(A \cap C) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

(10)　$\Pr(A \cap D) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

(11) $$\Pr(B \cap C) = \frac{0}{36} = 0$$

(12) $$\Pr(B \cap D) = \frac{0}{36} = 0$$

(13) $$\Pr(C \cap D) = \frac{0}{36} = 0$$

(14) $$\Pr(B \cup C) = \frac{19}{36}$$

(15) $$\Pr(B \cup D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

(16) $$\Pr(C \cup D) = \frac{13}{36}$$

(17) $$\Pr(B \cup C \cup D) = \frac{25}{36}$$

(18) $$\Pr\left(E \cup E^C\right) = \frac{36}{36} = 1$$

排反な事象の確率

標本空間 Ω に含まれる根元事象の数を N, 事象 X に含まれる根元事象の数を R_X, 事象 Y に含まれる根元事象の数を R_Y とする。

すると

$$\Pr(X) = \frac{R_X}{N} \tag{3}$$

$$\Pr(Y) = \frac{R_Y}{N} \tag{4}$$

である。

ここで X, Y が排反な事象であれば

$$X \cap Y = \varnothing \tag{5}$$

であって、$X \cup Y$ に含まれる根元事象の数は $N_X + N_Y$ である。従って、

$$\begin{aligned} \Pr(X \cup Y) &= \frac{R_X + R_Y}{N} &(6)\\ &= \frac{R_X}{N} + \frac{R_Y}{N} &(7)\\ &= \Pr(X) + \Pr(Y) &(8) \end{aligned}$$

である。

$\mathbf{Pr}(\boldsymbol{X})$ と $\mathbf{Pr}\left(\boldsymbol{X}^{C}\right)$ の関係

$$\begin{aligned} \Pr(X) &= p \qquad (9) \\ \Pr\left(X^C\right) &= q \qquad (10) \end{aligned}$$

とする。

$$X \cup X^C = \Omega \qquad (11)$$

なので

$$\Pr\left(X \cup X^C\right) = \Pr(\Omega) = 1 \qquad (12)$$

である。

$$X \cap X^C = \varnothing \qquad (13)$$

なので、

$$\begin{aligned} \Pr(X) + \Pr\left(X^C\right) &= \Pr\left(X \cup X^C\right) \qquad (14) \\ p + q &= 1 \qquad (15) \\ q &= 1 - p \qquad (16) \end{aligned}$$

9.3.2　頻度による確率の定義

頻度説または頻度主義という。何度も試行を繰り返し、その結果を記録し、試行の回数と事象が起こった回数の比率をもって確率とする。試行の回数を n とし、事象 A が起こった回数を n_A とする。n が充分に大きいとき

$$\Pr(A) = \frac{n_A}{n} \tag{17}$$

と定義する。

n_A の最小値は一度も起こらなかった場合の $n_A = 0$ であって、最大値は全ての試行において起こった場合の $n_A = n$ である。したがって

$$0 \leqq \Pr(A) \leqq 1 \tag{18}$$

排反な事象の確率

X と Y が排反事象であるとする。試行の回数を n とし、事象 X が起こった回数を n_X, 事象 Y が起こった回数を n_Y とする。

すると、

$$\Pr(X) = \frac{n_X}{n} \tag{19}$$

$$\Pr(Y) = \frac{n_Y}{n} \tag{20}$$

である。

仮定により

$$X \cap Y = \varnothing \tag{21}$$

なので $X \cup Y$ の起こった回数は $n_X + n_Y$ である。したがって、

$$\Pr(X \cup Y) = \frac{n_X + n_Y}{n} \tag{22}$$

$$= \frac{n_X}{n} + \frac{n_Y}{n} \tag{23}$$

$$= \Pr(X) + \Pr(Y) \tag{24}$$

である。

$\mathbf{Pr}(\boldsymbol{X})$ と $\mathbf{Pr}\left(\boldsymbol{X}^C\right)$ の関係

試行の回数は n であって、X が起こった回数は n_X なので X^C が起こった回数は、

$$n - n_X \tag{25}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X^C\right) &= \frac{n - n_X}{n} &(26)\\
&= \frac{n}{n} - \frac{n_X}{n} &(27)\\
&= 1 - \Pr(X) &(28)
\end{aligned}$$

である。

9.3.3　確率の公理主義的定義

確率の公理は次の 3 つからなる。これに合うならどのような数も確率と認められる。

1. すべての事象 A に対して、
$$0 \leqq \Pr(A) \leqq 1$$
2. 標本空間全体の確率は、
$$\Pr(\Omega) = 1$$
3. 互いに排反な事象 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ に対して、
$$\Pr\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\right) = \Pr\left(A_1\right) + \Pr\left(A_2\right) + \Pr\left(A_3\right) + \cdots$$

定義

事象 B が起こったとわかっている場合の事象 A の起こる確率を『B を条件とする A の条件付き確率』といい $\Pr(A \mid B)$ とあらわし

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \tag{29}$$

と定義する。

(29) の分母を掃うと

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B)\ \Pr(A \mid B) \tag{30}$$

を得る。

問題 II–9 – 4

標本空間ならびに各事象は問題 II–9 – 1 に準ずるものとし、各根元事象の起こりやすさは同様に確からしいとする。
次の事象の確率を求めなさい。

(1)　$\Pr(B \mid A)$

(2)　$\Pr(C \mid A)$

(3)　$\Pr(D \mid A)$

解例 II–9 – 4

(1) $$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{(1/6)}{(1/2)} = \frac{1}{3}$$

(2) $$\Pr(C \mid A) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(A)} = \frac{(1/9)}{(1/2)} = \frac{2}{9}$$

(3) $$\Pr(D \mid A) = \frac{\Pr(A \cap D)}{\Pr(A)} = \frac{(1/6)}{(1/2)} = \frac{1}{3}$$

定義

事象 A と 事象 B とそれらの積事象 $A \cap B$ の確率の関係が、

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\ \Pr(B) \tag{31}$$

である場合、事象 A と 事象 B は『独立』であるという。

積事象の確率を二つの事象の確率の積としてあらわすことができるとき二つの事象は独立である。

複数の事象が同時に起こる事象つまり積事象の確率を『同時確率』という。事象が独立な時、同時確率は事象の確率の積としてあらわすことができる。

数値を使った説明

x を赤いサイコロの目とし y を青いサイコロの目とする。このサイコロは、正しく作られており、それぞれの目は同程度に確からしく起こりやすいとする。ここで、$x+y$ が奇数である事象を A, $x+y$ が 3 の倍数である事象を B とする。

$$\Pr(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \tag{32}$$

$$\Pr(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \tag{33}$$

であって、

$$\Pr(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \tag{34}$$

なので

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\ \Pr(B) \tag{35}$$

である。したがって、事象 A と事象 B は独立な事象である。

同様に、$x+y$ が 5 の倍数である事象を C, $x+y=7$ である事象を D とする。

$$\Pr(C) = \frac{7}{36} \tag{36}$$

$$\Pr(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \tag{37}$$

であって、

$$\Pr(A \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \tag{38}$$

$$\Pr(A \cap D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \tag{39}$$

である。

$$\Pr(A \cap C) \neq \Pr(A)\ \Pr(C) \tag{40}$$

$$\Pr(A \cap D) \neq \Pr(A)\ \Pr(D) \tag{41}$$

なので、事象 A と事象 C, D はそれぞれ独立な事象ではない。

9.4 まとめ

- 確率の定義はいくつかある。
- 1 からある事象が起こった確率を引くと、ある事象が起こらなかった確率になる。
- ある事象が起こったことが分かると影響を受ける確率がある。
  これを条件付確率という。
- 独立な事象の場合は確率の積として積事象の確率を計算できる。