

第 II 部 統計

7 相関係数の範囲

ポイント

- 解の公式
- 判別式

- 相関係数の定義式
- 相関係数の範囲

7.1 はじめに

- 相関係数の絶対値は 1 以下です。
- まる飲みせずに、なんでか疑問を持ちましょう。
- 覚えるのではなく理解しましょう。

7.2 総和

定義

n 個の数値があり、 x_i を i 番目の値とする。全ての x_i を足し合わせた値を『総和』と呼び、 $\sum_{i=1}^n x_i$ という記号であらわす。

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (1)$$

7.2.1 総和の公式

総和記号の定義から以下の公式を導き出すことができる。

$$\sum_{i=1}^n c = nc \quad ; c \text{ は定数} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i \quad ; a \text{ は定数} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \quad (4)$$

7.2.2 総和の計算において自明な事

総和の公式を組み合わせることにより以下の関係は容易に確認することができる。

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + c) = a \sum_{i=1}^n x_i + nc \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i \quad (7)$$

問題 II-7-1

以下の式を展開しなさい。

$$\sum_{i=1}^n (tu_i + v_i)^2$$

解例 II-7-1

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (tu_i + v_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (t^2 u_i^2 + 2tu_i v_i + v_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n t^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^n 2tu_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\ &= t^2 \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2\end{aligned}$$

7.3 平方根

二乗すると a になる数を、 a の平方根という。

$a > 0$ のとき a の平方根は正と負の二つあり、それらの絶対値は等しい。

その正の平方根を $\sqrt{a}$ であらわす。負の平方根は $-\sqrt{a}$ である。

これら二つを合わせて $\pm\sqrt{a}$ とあらわす。

0 の平方根は 0 だけであり、 $\sqrt{0} = 0$ と定義する。

$$a > 0 \text{ のとき } \sqrt{a}^2 = (-\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a} > 0 \quad (8)$$

$$a = 0 \text{ のとき } \sqrt{0} = 0 \quad (9)$$

7.3.1 b^2 の平方根

$b^2 \geq 0$ である。 $b^2 > 0$ ならば、二乗すると b^2 になる数は、 $-b$ と b である。それらのうち正の値が $\sqrt{b^2}$ である。

$$b < 0 \implies -b > 0 \quad (10)$$

である。 $b^2 = 0$ ならば、 $b = 0$ なので定義により $\sqrt{b^2} = b$ である。したがって、

$$b \geq 0 \implies \sqrt{b^2} = b \quad (11)$$

$$b < 0 \implies \sqrt{b^2} = -b \quad (12)$$

である。これらをまとめて、

$$\sqrt{b^2} = |b| \quad (13)$$

である。

7.4 二次方程式

問題 II-7-2

次の式を展開しなさい。

$$(a + b)^2$$

問題 II-7-3

次の式を展開しなさい。

$$(a + b)(a - b)$$

解例 II-7-2

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= aa + ab + ba + bb \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

解例 II-7-3

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= aa - ab + ab - bb \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

問題 II-7-4

次の方程式を満たす x を求めなさい。ただし、 $a > 0$ とする。

$$x^2 = a^2$$

問題 II-7-5

次の不等式を満たす x の範囲を求めなさい。ただし、 $a > 0$ とする。

$$x^2 \leq a^2$$

解例 II-7-4

$$x^2 = a^2$$

$$x^2 - a^2 = 0$$

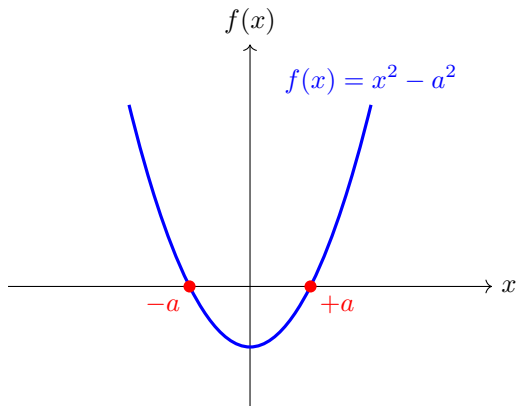
$$(x + a)(x - a) = 0$$

左辺の^{いんすう}因数の何方か一方が0 のとき式を満たすので

$$x = -a \quad \text{or} \quad x = a$$

これらをまとめて

$$x = \pm a$$

図1 $f(x) = 0$ 

解例 II-7-5

$$x^2 \leq a^2$$

$$x^2 - a^2 \leq 0$$

$$(x + a)(x - a) \leq 0$$

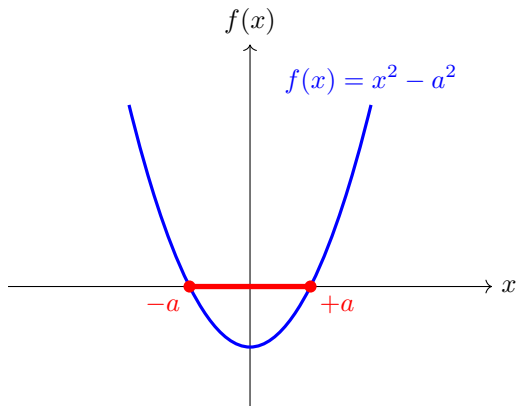
左辺の因数の符号が異なるとき式を満たす。

$a > 0$ なので、

$$x + a \geq 0 \quad \text{かつ} \quad x - a \leq 0$$

$$x \geq -a \quad \text{かつ} \quad x \leq a$$

$$-a \leq x \leq a$$

図2 $f(x) \leq 0$ 

問題 II-7-6

以下の式を x について解け。ただし、 $a \neq 0$ とする。

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

解例 II-7-6

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$ax^2 + 2bx = -c$$

$$x^2 + 2\frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

両辺に $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ を加える。

$$x^2 + 2\frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

左辺を因数分解し、右辺は通分し分母を共通にする。

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$$

問題 II-7-4 より

$$x + \frac{b}{a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}$$

左辺第二項を右辺へ移項し分母を共通にする

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

7.4.1 解の公式

二次方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0, a \neq 0$ を、 x に関して解いた式を解の公式という¹⁾。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (14)$$

解の公式分子第二項は、 $b^2 - ac$ の平方根である。

$b^2 - ac > 0$ ならば、 $b^2 - ac$ は二つの平方根を持つ。

$b^2 - ac = 0$ ならば、平方根は $\sqrt{0}$ 一つだけである。

そして、 $b^2 - ac < 0$ のとき、二乗して負の値になる数は実数では存在しない。

1) 一般的な解の公式は $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ の解を与える式であって、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である。

7.4.2 判別式

二次方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0, a \neq 0$ において、 $b^2 - ac$ を判別式という。判別式が正の場合、二次方程式は二つの実数解をもつ。判別式が 0 の場合は、実数解は一つになる。このときを重解という。そして判別式が負の時は実数解を持たない。

$$b^2 - ac > 0 \quad \text{解が二つ}$$

$$b^2 - ac = 0 \quad \text{解が一つ}$$

$$b^2 - ac < 0 \quad \text{解なし}$$

7.4.3 判別式と放物線の位置

$f(x) = ax^2 + 2bx + c$ において $a > 0$ とする。

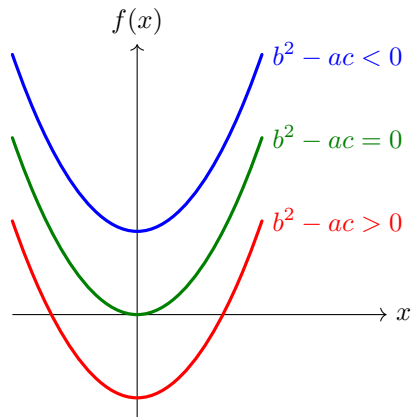
$$b^2 - ac = 0 \iff f(x) \geq 0 \quad (15)$$

$$b^2 - ac < 0 \iff f(x) > 0 \quad (16)$$

従って、

$$b^2 - ac \leq 0 \iff f(x) \geq 0 \quad (17)$$

図3 判別式と放物線の位置



7.5 分散・標準偏差・共分散・相関係数

確認のため各統計量の定義式を示す。

$$V_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (18)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (19)$$

$$Cov_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) \quad (20)$$

$$\rho_{xy} = \frac{Cov_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (21)$$

7.5.1 相関係数の定義式

$$\rho_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (22)$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (23)$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (24)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (25)$$

7.6 変数 t の関数 $f(t)$

天下りの的に変数 t の関数 $f(t)$ を考える。

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \left((y_i - \bar{y})t + (x_i - \bar{x}) \right)^2 \quad (26)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left((y_i - \bar{y})^2 t^2 + 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})t + (x_i - \bar{x})^2 \right) \quad (27)$$

$$= t^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + 2t \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (28)$$

ここで $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \neq 0$ とする。

7.6.1 $f(t)$ の判別式の符号

$f(t)$ は二乗和なので常に非負である。従って $f(t)$ の判別式は非正である。

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \leq 0 \quad (29)$$

問題 II-7-5 より

$$-\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \leq \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (30)$$

それぞれの辺から $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ を掃うと、

$$-1 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \leq +1 \quad (31)$$

相関係数の定義式 (25) より中央部分は相関係数 (ρ_{xy}) なので

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq +1 \quad (32)$$

7.7 まとめ

- $ax^2 + 2bx + c = 0$ の解の公式を導出した。
- $b^2 - ac$ を判別式という。
- 与えられた二次関数が^{こうとうてき}恒等的に非負の場合、判別式は非正である。
- 相関係数の定義式は約分されている。
- $-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$ は判別式を使って説明できる。